

0. Ryhmän toiminta joukossa

Määr. Olk. (G, \cdot) ryhmä
 \bar{X} joukko

Ryhmän G toiminta joukossa \bar{X} on funktio

$$\varphi : G \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}$$

s.e. (1) $\varphi(e, x) = x \quad \forall x \in \bar{X} \quad (e \text{ neutraalis})$

(2) $\varphi(g_2, \underbrace{\varphi(g_1, x)}_{\in \bar{X}}) = \varphi(\underbrace{g_2 g_1}_{\in G}, x) \quad \forall g_1, g_2 \in G, x \in \bar{X}.$

Kolmikkoa (\bar{X}, G, φ) sanotaan transformaatioryhmäksi tai

G :n toiminnaksi joukossa \bar{X} , ja \bar{X} :ää sanotaan G -joukoksi.

(G -avaruudeksi)

Huom. Funktio $\varphi : G \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ määrittelee jonkun funktion

$$\{ \varphi_g : \bar{X} \rightarrow \bar{X} \mid g \in G \}$$

kaavalla

$$\varphi_g(x) = \varphi(g, x)$$

ja ehdot (1) ja (2) saavat muodon

(1)' $\varphi_e(x) = x \quad \forall x \in \bar{X}$ eli $\varphi_e = id_{\bar{X}}$

(2)' $\varphi_{g_2}(\varphi_{g_1}(x)) = \varphi_{g_2 g_1}(x)$ eli $\varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_1} = \varphi_{g_2 g_1}.$

(Siis : jokaista G :n alkia vastaa funktio $\bar{X} \rightarrow \bar{X}$,

e :tä vastaa $id_{\bar{X}}$ ja lisäksi ryhmälaskutoimitus vastaa funktioiden yhdistämistä.)

Selvästi jokainen $\varphi_g : \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ on bijektio :

$$\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} \stackrel{(2)'}{=} \varphi_{g g^{-1}} = \varphi_e \stackrel{(1)'}{=} id_{\bar{X}}$$

$$\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \varphi_{g^{-1} g} = \varphi_e = id_{\bar{X}}$$

} $\Rightarrow \varphi_g, \varphi_{g^{-1}}$
toista sa käänt.kau
 \Rightarrow molemmat bij.

Huom. Ellei sekaannuksen vaaraa ole, yleensä merkitään

$$\varphi(g, x) = gx,$$

jolloin ehdot (1) ja (2) saavat muodon

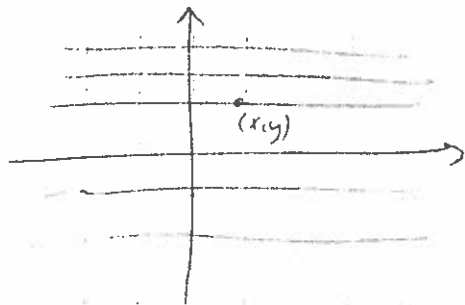
(1)'' $ex = x \quad \forall x \in \bar{X}$

(2)'' $g_2(g_1 x) = (g_2 g_1)x \quad \forall g_1, g_2 \in G, x \in \bar{X}.$

$$1) \quad \varphi(0, (x, y)) = (x+0, y) = (x, y)$$

$$\varphi(t_2, \varphi(t_1, (x, y))) = \varphi(t_2, (x+t_1, y)) = ((x+t_1)+t_2, y)$$

$$\varphi(t_2+t_1, (x, y)) = (x+(t_2+t_1), y) \quad //$$



$$\text{Pisten } (x, y) \text{ rate } = \varphi\{(t, (x, y)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Esim. 1) $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t, (x, y)) = (x+t, y)$.

(2)

2) $GL(n, \mathbb{R}) = \{ \text{kääntyvät } \mathbb{R}\text{-kertimiset (n:n)-matriisit} \}$

$(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ on ryhmä, joka toimii

(lineaarikuvausten) avaruudessa \mathbb{R}^n :

$$GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (A, \bar{x}) \mapsto A\bar{x}.$$

$$I\bar{x} = \bar{x}$$

$$B(A\bar{x}) = (BA)\bar{x}$$

3) Jos \bar{X} on G -avaruus ja $H \leq G$, niin \bar{X} on luonn.
tavalla myös H -avaruus:

$$H \times \bar{X} \hookrightarrow G \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}.$$

Sen sijaan jos $A \in \bar{X}$, A ei välttämättä ole G -avaruus,
koska voi olla $\varphi(G \times A) \not\subseteq A$.

ylläolevasta rajoituksesta saadaan, että

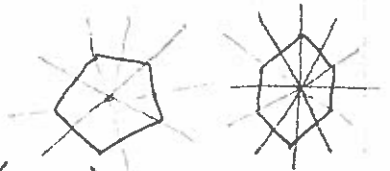
Esim. \mathbb{R}^n on $O(n)$ -avaruus ($O(n)$ = ortogonaaliset matriisit)

S^{n-1} , D^n ovat $O(n)$ -avaruuksia.

4) n -kulmioiden symmetriaryhmät D_n

"kierrat ja peilaukset

$\# D_n = 2n$, n kpl kiertoja
 n kpl peilauksia



Huom. void. ajatella $D_n \leq GL(2, \mathbb{R})$.

5) Galois'n teoria (Alg. II?):

K, L kuntia, $K \subset L$ (eli L on K :n laajennus)

$$\Gamma(L:K) = \{ \vartheta: L \rightarrow L \mid \vartheta \text{ } K\text{-automorfismi} \}$$

↖ eli kunnaimorfismi $L \rightarrow L$

s.e. $\vartheta|_K = \text{id}_K$.

$(\Gamma(L:K), \circ)$ on ryhmä, laajennuksen Galois'n ryhmä.

Tämä ryhmä sisältää hyödyllistä tietoa laajennuksesta $K \subset L$.

Esim. polynomiyhtälöiden ratkaisukaavat (\neq yleisiä ratk. kaavaa, kun aste ≥ 5)

polynomi $P \rightsquigarrow$ laajennus $\mathbb{Q} \subset L \subset \mathbb{C}$

\rightsquigarrow ryhmä $\Gamma(L:\mathbb{Q})$.

Historiallinen näkökulma: ilmeisesti ensimmä. kerta, jolloin esiintyi abstrakti ryhmän käsite.

6) Dynaamiset systeemit (= ryhmän $(\mathbb{R}, +)$ toiminnot)

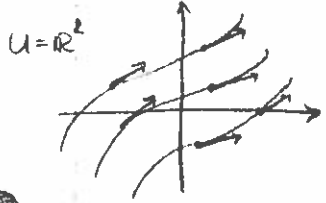
Teoreema

a) Olk. $\varphi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ \mathbb{R} in toiminta, $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
ol. että φ :llä on ositt. derivaatta 1. muuttujan suhteen.

Määr. vektorikenttä

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \bar{x}) \Big|_{t=0}$$



Tällöin $\varphi_q: \mathbb{R} \rightarrow U$, $\varphi_q(t) := \varphi(t, q)$

on diff. yhtälön

$$\bar{x}' = f(\bar{x})$$

ratkaisun alkuehdolla $\varphi_q(0) = q$.

b) kääntäen, jos $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on jatk. vektorikenttä
ja ol. että diff. yhtälöllä

$$\bar{x}' = f(\bar{x})$$

on ylikääntäen ratkaisun $\varphi_q: \mathbb{R} \rightarrow U$ s.e. $\varphi_q(0) = q$ ($\forall q \in U$),

niin $\varphi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$

$$\varphi(t, q) = \varphi_q(t)$$

määrittelee \mathbb{R} in toiminnan U :ssa.

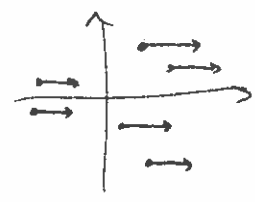
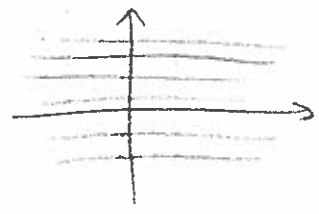
□

Esim. 1)

$$\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(t, (x, y)) = (t+x, y)$$

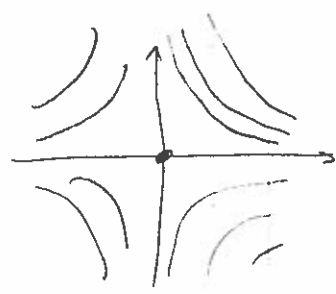
$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, (x, y)) \Big|_{t=0} = (1, 0)$$



2) diff. yhtälöä $(x, y)' = (x, -y)$

vastaa toiminta $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t, (x, y)) = (e^t x, e^{-t} y)$$



Tutkimus lähinnä tilannetta, jossa G on n.s. topologinen ryhmä ja X top. avaruus. Lisävaatimus: $\varphi: G \times X \rightarrow X$ on jatkuva. (Huom. tämä ei ole yhtäpitävää sen kanssa että olisi annettu perhe $\{\varphi_g: X \rightarrow X \mid g \in G\}$ jatkuvia funktioita!)

I Topologiset ryhmät

Määntelmä ja perusominaisuuksia

Määrit. 1.1. Topologinen ryhmä G on ryhmä G , joka on myös topologinen T_1 -avaruus s.e. laskutoimitus

$$\mu: G \times G \rightarrow G, (g, g') \mapsto gg'$$

ja kuvaukset

$$\iota: G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$$

ovat jatkuvia. \square

(Siis: (G, \cdot, ι))

Pal. mieleen: Top. avaruus G on $T_1 \Leftrightarrow \{g\} \in \mathcal{T} \forall g \in G$.

Jotissakin kirjoissa (esim. Kawakubo) vaaditaan, että G on Hausdorff. Kuten kohta näemme, T_1 topologisen ryhmän on aina Hausdorff, vaikka yleisest' Hausd. ehto on vahvempi kuin T_1 .

Esim. 1.2. Topologisia ryhmiä:

- $(\mathbb{R}, +)$
- $(\mathbb{R}^n, +)$
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
- (S^1, \cdot)
- mikä tahansa ryhmä + diskreetti topologia

Olk. $M(n, \mathbb{R})$ reaalikertoimisten $(n \times n)$ -matriisien joukko.

Määr. bijektio

$$\alpha: M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$$

Annetaan joukolle $M(n, \mathbb{R})$ topologia s.e. φ on homeomorfismi:

$$U \in M(n, \mathbb{R}) \stackrel{\text{määr.}}{\Leftrightarrow} \alpha(U) \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Siten annetaan osajoukolle $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \exists A^{-1}\}$
 $= \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ relativitopologia.

Ei ole vaikea osoittaa, että $\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, jolloin

$$GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset M(n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}.$$

HT $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ on topologinen ryhmä. □

Esim. 1.3.

\mathbb{X} top. avaruus

$$\text{Homeo}(\mathbb{X}) = \{f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X} \mid f \text{ homeom.}\}$$

$(\text{Homeo}(\mathbb{X}), \circ)$ on ryhmä.

Voidaan osoittaa ([Kawakubo, s. 17]), että jos \mathbb{X} on kompakti Hausdorff, niin $\text{Homeo}(\mathbb{X})$ varustettuna kompakti-suovin topologialla on topologinen ryhmä. □

Olk. nyt G top. ryhmä, $h \in G$.

Määr.

$$r_h : G \rightarrow G, \quad g \mapsto gh$$
$$l_h : G \rightarrow G, \quad g \mapsto hg.$$

Lemma 1.4. r_h ja l_h ovat homeomorfismeja.

Tod. $r_h : G \xrightarrow{\quad} G \times \{h\} \xrightarrow{\mu} G$ on jatkuva.
 $g \mapsto (g, h) \mapsto gh$

Selvästi $r_{h^{-1}} \circ r_h = \text{id}_G$ ja $r_h \circ r_{h^{-1}} = \text{id}_G$.

Koska $r_{h^{-1}}$ myös on jatkuva, ovat r_h ja $r_{h^{-1}}$ homeomorfismeja.

Vastaavasti l_h . □

Merkintöjä: Jos $A \subset G$ ja $B \subset G$, merkk.

$$AB = \{ gg' \mid g \in A, g' \in B \}.$$

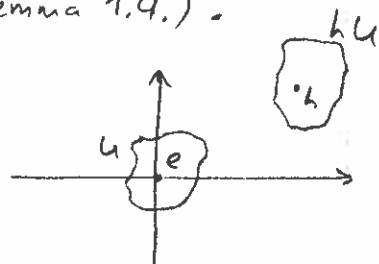
Yleensä lyhennetään $A\{g\} = Ag$ ja $\{g\}B = gB$.

Lisäksi $A^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in A\}$.

Lemma 1.5. Jos $e \in U \subset G$ ja $h \in G$, niin hU on h in ympäristö G issä. Samoin Uh .

Tod. Koska $e \in U$, niin $h = he \in hU$. Lisäksi $hU = L_h(U)$ on avoin G issä, koska L_h on homeomorfismi (Lemma 1.4.). Siis hU on h in ympäristö. Vastaavasti Uh .

□



Lemma 1.6. $z: G \rightarrow G, z(g) = g^{-1}$ on homeomorfismi.

Tod. z on jatkuva (top. ryhmän määr.), selvästi $z \circ z = id_G$ eli z on oma käänt.kuvautuksensa, \Rightarrow väite.

□

Korollari 1.7. $U \subset G \Rightarrow U^{-1} = z(U) \subset G$.

□

Lemma 1.8. Oik. $e \in U \subset G$. Tällöin \exists ein ympäristöt V s.e. $VV \subset U$ ja W s.e. $WW^{-1} \subset U$.

(vrt. luv. 2/2)

Tod.

$$G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

Nyt $\mu(e,e) = e$, joten μ in jatkuvuudesta seuraa, että $\exists (e,e)$ in ymp. V' s.e. $\mu(V') \subset U$. Tunnetusti V' sisältää muotoa $V \times V$ olevan ympäristön. Siis $VV = \mu(V \times V) \subset U$.

Myös kuvaus $G \times G \xrightarrow{id \times z} G \times G \xrightarrow{\mu} G$ on jatkuva, ja ympäristö W löytyy vastaavasti.

□

Lause 1.9 Jokainen top. ryhmä on Hausdorffin avaus.

Tod. Oik. $x, y \in G, x \neq y$.
Sis. $e \neq x^{-1}y$. Koska G on T_1 , on $\{x^{-1}y\} \in G$
eli $U \subseteq G \setminus \{x^{-1}y\} \in G$ on e :n ympäristö.

Nyt 1.8. \Rightarrow
 \exists ein ymp. W s.e. $WW^{-1} \subset U$
eli $x^{-1}y \notin WW^{-1}$.

Nyt xW ja yW ovat erilliset:
jos olisi $a \in xW \cap yW$, niin
 $a = xw_1$ jollakin $w_1 \in W$ ja
 $a = yw_2$ jollakin $w_2 \in W$.
Sis. $xw_1 = yw_2$ ja $x^{-1}y = w_1w_2^{-1} \in WW^{-1}$ RISTIRIITYS

Sis. $xW \cap yW = \emptyset$.
Lisäksi xW on x :n ymp. ja yW on y :n ymp. (Lemma 1.5.). \square

Alinyhmät

Oik. G top. ryhmä, $H \leq G$.
Annetaan H :lle relatiivitopologia, eli
 $U \in H \Leftrightarrow \exists U' \in G$ s.e. $U = U' \cap H$.

Merk. $H_{rel}G$.

Pidetään seuraavia tuloksia tunnettuina (Topologia II):

Oik. X, Y top. av., $A \subset X, B \subset Y$.

a) Oik. $f: X \rightarrow Y$ s.e. $f(X) \subset B$.

Tällöin $f: X \rightarrow B_{rel}Y$ jatkua $\Leftrightarrow f: X \rightarrow Y$ jatkuva

b) Jos $f: X \rightarrow Y$ on jatkuva, niin $f|_A: A_{rel}X \rightarrow Y$ on jatkuva

c) $A_{rel}X \times B_{rel}Y = (A \times B)_{rel}(X \times Y)$ topologisinä avauksina.

Näistä seuraa helposti, että $H_{rel}G$ on topologinen ryhmä (HT).

Esim. 1.10. $(\mathbb{R}, +)$ $\mathbb{Z} \in \mathbb{R}$; \mathbb{Q} ei avoin, ei sulj.
 $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ $]0, \infty[$ avoin ja suljettu aliryhmä

$$\mathcal{O}(n) = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = I \} \in GL(n, \mathbb{R}) :$$

Tark. funktiota $\varphi : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$
 $A \mapsto A^t A$

Selvästi φ on jatkuva :

$$GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$
$$A \mapsto (A^t, A) \mapsto A^t A$$

Nyt $\mathcal{O}(n) = \varphi^{-1} \{ I \}$ on suljettu. \square
sulj.



Lause 1.11. Jokainen avoin aliryhmä on myös suljettu.

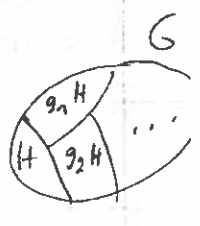
Tod.

Olk. $H \in G$.

Nyt Lemma 1.5. $\Rightarrow gH \in G \forall g \in G$.

Koska

$$G \setminus H = \bigcup_{g \in G/H} gH \in G, \text{ on siis } H \in G. \square$$



Lause 1.12. Olk. G top. ryhmä, $H \subseteq G$. Tällöin $\bar{H} \subseteq G$.
↑ sulkeuma

Tod. On siis osoitettava, että

$$\mu(\bar{H} \times \bar{H}) \subseteq \bar{H}$$

$$\text{ja } \tau(\bar{H}) \subseteq \bar{H}.$$

Koska $H \subseteq G$, tiedetään $\mu(H \times H) \subseteq H$ ja $\tau(H) \subseteq H$.

$$\text{Nyt } \mu(\bar{H} \times \bar{H}) = \mu(\overline{H \times H}) \overset{\mu \text{ jatkuva}}{\subseteq} \overline{\mu(H \times H)} \subseteq \bar{H}$$

$$\text{ja } \tau(\bar{H}) = \overline{\tau(H)} \overset{\tau \text{ homeom.}}{\subseteq} \bar{H}$$

Lisäksi $e \in H \subseteq \bar{H}$.

\square

Siis \bar{H} on G :n sulj. aliryhmä ja itsekin top. ryhmä.

Neutraalialkion komponentti G_0

Lause 1.13, olk. G top. ryhmä ja G_0 se G in yhtenäinen komponentti, joka sisältää e in. Tällöin G_0 on G in suljettu normaali aliryhmä.

Tod. Topologia II $\Rightarrow G_0$ on suljettu.

Selvästi $e \in G_0$, joten on osoitettava, että

$$\mu(G_0 \times G_0) \subset G_0.$$

$$\text{ja } Z(G_0) \subset G_0.$$

Nyt $G_0 \times G_0$ on yhtenäinen, joten $\mu(G_0 \times G_0)$ on yhtenäinen koska μ on jatkuva. Koska $e = \mu(e, e) \in \mu(G_0 \times G_0)$, niin välttämättä $\mu(G_0 \times G_0)$ sisältyy komponenttiin G_0 .
Siiis $\mu(G_0 \times G_0) \subset G_0$.

Vastaavasti tod., että $Z(G_0) \subset G_0$.

$\therefore G_0$ on aliryhmä.

Normaalisuus: väite $gG_0g^{-1} \subset G_0 \quad \forall g \in G$

tod. olk. $g \in G$ ja tark. kuvausta

$$\gamma: G \rightarrow G$$

$$g' \mapsto gg'g^{-1}$$

Nyt γ on jatkuva joten $\gamma(G_0)$ on yhtenäinen.

Koska $e = \gamma(e) \in \gamma(G_0)$, niin välttämättä $\gamma(G_0) \subset G_0$ eli $gG_0g^{-1} \subset G_0$. \square

\square Lause 1.13.

Esim. • $]0, \infty[\subset (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

• $S^1 \times \mathbb{Z}$

• void. ar., että $GL(n, \mathbb{R})$:llä on kaksi komponenttia:

$$\{A \mid \det(A) > 0\} \text{ ja } \{A \mid \det(A) < 0\}.$$

" G_0 "

Tekijävarus G/H

Olk. G top. ryhmä ja $H \leq G$.

kertaus: $G/H = \{ gH \mid g \in G \}$ vasenpuol. sivuluokkien joukko

Merk. $\pi: G \rightarrow G/H$ projekti
 $g \mapsto gH$

Joukko G/H voidaan ajatella myös ekvivalenssiluokkien joukko, kun määr. G :ssä ekv. relatio \sim :

$$\begin{aligned}
 a \sim b &\Leftrightarrow b^{-1}a \in H \\
 &\Leftrightarrow a^{-1}b \in H \\
 &\Leftrightarrow \exists h \in H \text{ s.e. } a^{-1}b = h \\
 &\Leftrightarrow \exists h \in H \text{ s.e. } b = ah.
 \end{aligned}$$

Siis ekv. luokka $[a] = aH = \{ ah \mid h \in H \}$.

Annetaan G/H :lle tekijätopologia projektion $\pi: G \rightarrow G/H$ avulla:

$$U \subseteq G/H \stackrel{\text{määr.}}{=} \pi^{-1}(U) \subseteq G.$$

Lemma 1.14. π on jatkuva ja avoin kuvaus.

Tod. Tekijätopologian määr. $\Rightarrow \pi$ on jatkuva

π avoin: olk. $V \subseteq G$. väite: $\pi(V) \subseteq G/H$

Tutkitaan joukkoa (*)

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = VH = \bigcup_{h \in H} Vh.$$

Koska $V \subseteq G$, on $Vh \subseteq G \ \forall h$, ja $\bigcup_{h \in H} Vh \subseteq G$.

Siis $\pi^{-1}(\pi(V)) \subseteq G$, joten tekijätop. määr. $\Rightarrow \pi(V) \subseteq G/H$.

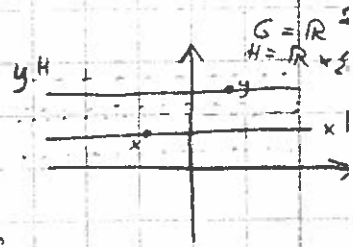
$$\left[\begin{aligned}
 (*) : \quad g \in \pi^{-1}(\pi(V)) &\Leftrightarrow \pi(g) \in \pi(V) \\
 &\Leftrightarrow gH = vH \text{ jollakin } v \in V \\
 &\Leftrightarrow g \in vH \text{ jollakin } v \in V \\
 &\Leftrightarrow g \in VH.
 \end{aligned} \right]$$



Teoreema 1.15. Olk. G top. ryhmä, $H \leq G$.

Seur. ehdot ovat yhtäpitäviä:

- (1) H on suljettu
- (2) G/H on Hausdorff
- (3) G/H on T_1 .



Tod. (1) \Rightarrow (2): Olk. $xH, yH \in G/H$, $xH \neq yH$.

Siis $x \notin yH$ ja koska $H \in G$, myös $yH \in G$.

Siis \exists x 'n ymp. U' s.e. $U' \cap yH = \emptyset$.

Tällöin $U = U'x^{-1}$ on ein ympäristä ja koska $Ux = U'$,

niin $Ux \cap yH = \emptyset$ (*)

Vastaavasti kuten Lemmassa 1.8. void. löytää ein ymp. W s.e. $W^{-1}W \subset U$.

Os. että $WxH \cap WyH = \emptyset$ (**)

antikerä: $\exists b \in WxH \cap WyH$, jolloin

$b = w_1 x h_1 = w_2 y h_2$ jollakin $w_1, w_2 \in W, h_1, h_2 \in H$

Siis $w_2^{-1} w_1 x = y h_2 h_1^{-1}$, mutta

$w_2^{-1} w_1 x \in W^{-1}Wx \subset Ux$ ja

$y h_2 h_1^{-1} \in yH$, RISTRIITA (*)in kanssa.

Siis (**) on voimassa.

Määr. $W_1 = \pi(Wx)$, $W_2 = \pi(Wy)$,

jotka ovat avoimia G/H :ssa Lemman 1.14 nojalla.

Ne ovat siis ympäristöt G/H :in alkioille $\pi(x) = xH$ ja $\pi(y) = yH$.

Lisäksi $W_1 \cap W_2 = \emptyset$:

Nyt $\pi^{-1}(W_1) = WxH$ ja $\pi^{-1}(W_2) = WyH$ (vrt. ed. Lemman ta)

π on surjektio ja $WxH \cap WyH = \emptyset$, on välttämättä myös $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

(2) \Rightarrow (3): selvä.

(3) \Rightarrow (1): $H = \pi^{-1}(\{eH\}) \in G$.

suljettu G/H :issa
 T_1 -ehdosta nojalla

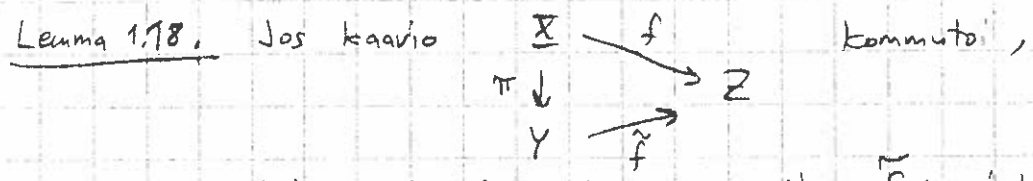


Tekijäryhmiät

Jos G on top. ryhmä ja H suljettu normaali aliryhmä. Tällöin G/H on ryhmä varustettuna laskeutoimituksella $(gH)(g'H) = (gg')H$.

Teoreema 1.16. Y.o. oletuksin G/H on topologinen ryhmä.

Tarvitsemme topologis'n aputuloksia:



π on samastuskuvauk^s ja f on jatkuva, niin \tilde{f} on jatkuva, = tekijäkuvauk^s

Tod. olk. $U \in Z$, on osi, että $\tilde{f}^{-1}U \in Y$.

Nyt $\pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}U) = f^{-1}U \in \bar{X}$, koska f on jatkuva

π samastuskuvauk^s $\Rightarrow \tilde{f}^{-1}U \in Y$. \square

Lemma 1.19. Jos $\pi: \bar{X} \rightarrow Y$ on avoin, niin $\pi \times \pi: \bar{X} \times \bar{X} \rightarrow Y \times Y$ on avoin.

Tod. HT. \square

Pal. mieleen (Top. II) Olk. \bar{X}, Y top. avaruuksia.
 Kuvauk^s $f: \bar{X} \rightarrow Y$ on samastuskuvauk^s (= tekijäkuvauk^s),
 jos 1) f on surjektio
 2) f köinduroi Y :hyn sen alkuperäisen topologian, eli
 $V \in Y \Leftrightarrow f^{-1}V \in \bar{X}$.

Esim. $\pi: G \rightarrow G/H$ on samastuskuvauk^s

Lause 1.17. Olk. $f: \bar{X} \rightarrow Y$ jatkk. surjektio. Jos f on avoin tai suljettu kuvauk^s, niin f on samastuskuvauk^s.

Tod. Top. II, lause 8.9. \square

Tod. (1.16)

Teoreeman 1.15 nojalla G/H on Hausdorff.

Merk. $\mu' : G/H \times G/H \rightarrow G/H$

$$(gH, g'H) \mapsto (gg')H$$

ja tark. kaaviota

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ \pi \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G/H \times G/H & \xrightarrow{\mu'} & G/H \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (g, g') & \mapsto & gg' \\ \downarrow & & \downarrow \\ (gH, g'H) & \mapsto & (gg')H \end{array}$$

joka kommutoi.

Nyt 1.14. $\Rightarrow \pi$ avoin $\stackrel{1.19.}{\Rightarrow} \pi \times \pi$ avoin $\stackrel{1.17.}{\Rightarrow} \pi \times \pi$ samastuskuv.

$\stackrel{1.18.}{\Rightarrow} \mu'$ on jatkuva (Lemman 1.18. f on tässä $\pi \circ \mu$).

Vastaavasti $z' : G/H \rightarrow G/H$

$$gH \mapsto g^{-1}H$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{z} & G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G/H & \xrightarrow{z'} & G/H \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g & \mapsto & g^{-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ gH & \mapsto & g^{-1}H \end{array}$$

kaavio kommutoi, π on tekijäkuvauk $\Rightarrow z'$ on jatkuva.

□

Kompakteista ja lokaalisti kompakteista ryhmistä

Teoreema 1.20. Olk. G kompakti top. ryhmä ja H sulj. aliryhmä.

Tällöin H on kompakti top. ryhmä ja tekijäkuvauk G/H on kompakti.

Jos H on sulj. normaali aliryhmä, niin G/H on kompakti top. ryhmä.

Tod. G komp., H sulj. $\Rightarrow H$ komp.

H top. ryhmä ok

G komp., π jatkuva $\Rightarrow G/H = \pi(G)$ kompakti.

H sulj. normaali alir. $\stackrel{1.16}{\Rightarrow} G/H$ top. ryhmä.

□

Lause 1.21. Top. ryhmä G on lok. kompakti \Leftrightarrow neutraalialtiolla on oleassa ympäristö, jonka sulkeuma on kompakti.

Tod. Olk. $g \in G$ ja U ein ympäristö, \bar{U} kompakti.
Tällöin

$$gU = \ell_g(U) \text{ on } g\text{'in ympäristö}$$

ja $\overline{gU} = \ell_g(\bar{U})$ on kompakti, koska ℓ_g on homeomorfismi. \square

Teoreema 1.22. Olk. G lokaalisti kompakti top. ryhmä, H suljettu aliryhmä. Tällöin H on lokaalisti kompakti top. ryhmä ja G/H on lokaalisti kompakti.

Jos H on sulj. normaali aliryhmä, niin tekijäryhmä G/H on lokaalisti kompakti.

Tod. HT

\square

Tekijäryhmä G/G_0

Aiemmin todistettu rajalle G/G_0 on top. ryhmä (1.13 & 1.16).

Lemma 1.23. Olk. X, Y top. avaruuksia ja $f: X \rightarrow Y$ samastuskuvaus.

Jos Y ja jokainen $f^{-1}(y), y \in Y$, ovat yhtenäisiä, niin X on yhtenäinen.

Tod. HT

\square

Teoreema 1.24. Top. ryhmä G/G_0 on täysin epäyhtenäinen (eli komponentit ovat ylöriitä).

Tod. Tiedämme (1.14), että $\pi: G \rightarrow G/G_0$ on avoin kuvaus.

Olkoon Y G/G_0 in yhtenäinen osajoukko.

Osoitetaan, että Y on ylöriitä.

Os. ensin, että $\pi|_{\pi^{-1}(Y)} : \pi^{-1}(Y) \rightarrow Y$ on avoin kuvaus.
 Jouton $\pi^{-1}(Y)$ avoin osajoukko on muotoa $U \cap \pi^{-1}(Y)$, missä $U \in \mathcal{G}$.

Nyt

$$\pi(U \cap \pi^{-1}(Y)) = \pi(U) \cap Y.$$

Lisäksi $\pi(U) \in \mathcal{G}/G_0$, koska π on avoin kuvaus, joten $\pi(U) \cap Y \in \mathcal{Y}$.
 Siis $\pi|_{\pi^{-1}(Y)}$ on avoin kuvaus ja surjektio, joten se on samastuskuvaus.

Jokainen $\pi^{-1}(y)$, $y \in Y$ on muotoa gG_0 jollakin $g \in G$, joten se on yhtenäinen, koska G_0 on yhtenäinen. Koska lisäksi Y on yhtenäinen, niin Lemma 1.23 $\Rightarrow \pi^{-1}(Y)$ on yhtenäinen.

Jokainen G :n komponentti on muotoa gG_0 jollakin $g \in G$:

Jos A on komponentti ja $g \in A$, niin $g^{-1}A$ on komponentti ja $e = g^{-1}g \in g^{-1}A$. Siis $g^{-1}A = G_0$ ja $A = gG_0$.

Koska $\pi^{-1}(Y)$ on yhtenäinen, on siis $\pi^{-1}(Y) \subset gG_0$ jollakin $g \in G$.
 Siis

$$Y = \pi(\pi^{-1}(Y)) \subset \pi(gG_0) = \{\pi(g)\} \text{ eli } Y \text{ on yksinä.} \quad \square$$

Lause 1.25. Jos G on lokaalisti yhtenäinen top. ryhmä, niin G/G_0 on diskreetti.

Tod. HT.

\square

Esimerkkejä matriisiryhmistä

$GL(n, \mathbb{R})$ on topologinen ryhmä (tod. aiemmin)
 $\cong M(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ "general linear group"

$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = I\}$ "orthogonal group"
 "= etäisyydet säilyttävät lin. kuvaukset = kierrat, peilaukset ja niiden yhdistykset"

$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ "special linear group"

$SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$ "special orthogonal group"

Topologisten ryhmien suorat ja puolisuorat tulot

(konteetivaa)

-lause 1.26. Olk. G_1, G_2 top. ryhmiä. Määritellään tulon $G_1 \times G_2$ laskutoimitus kaavalla $(g_1, g_2) \cdot (g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2')$ ja annetaan $(G_1 \times G_2)$:lle tulotopologia.

Tällöin $G_1 \times G_2$ on topologinen ryhmä, ryhmien G_1 ja G_2 suora tulo.

Tod. seuraava kohta edellisestä yleisemmästä lauseesta. □

olk. N ja H top. ryhmiä ja olkoon $\varphi^*: H \times N \rightarrow N$

H :n jatkuva toiminta N :ssä automorfismeilla, eli

1) φ^* on jatkuva

2) $e_H n = n \quad \forall n \in N$

$h_2(h_1 n) = (h_2 h_1) n \quad \forall h_1, h_2 \in H, n \in N$ } "ryhmän toiminta
joukossa"

3) Jokainen $\varphi_h^*: N \rightarrow N$ on N :n automorfismi, eli homeomorfismi ja ryhmäisomorfismi.

Esim. $H = \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$

$N = SO(n)$

toiminta $\mathbb{Z}_2 \times SO(n) \rightarrow SO(n)$

$(1, A) \mapsto A$

$(-1, A) \mapsto B A B^{-1}$

, missä $B = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$.

Huom. φ^* void. taas ajatella funktiona

$\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(N), \quad \varphi(h)(n) = \varphi^*(h, n)$

eli jokaista H :n alkioa vastaa jokin N :n automorfismi.

Ehdot 2) tarkoittavat että φ on homomorfismi $H \rightarrow (\text{Aut}(N), \circ)$

Määritellään nyt ryhmien N ja H puolisuora tulo

$N \rtimes_{\varphi} H$

(tai yksinkertaisemmin $N \rtimes H$,
jos φ on selästä selvä):

Topologinen avaruus $N \rtimes H$ on $N \times H$ tulotopologiella varustettuna. Laskutoimitus määritellään kaavalla

$$(n, h) * (n', h') = (n \underbrace{\varphi^*(h, n')}_{\in N}, hh') \in N \rtimes H.$$

Huom. jos H toimii N :ssä triviaalisti, eli $\varphi^*(h, n') = n' \quad \forall h \in H, n' \in N$,

niin saadaan suora tulo.

Lause 1.27. Joukko $N \rtimes H$ ^{tulotopologialla ja} laskutoimituksella $*$ varustettuna on topologinen ryhmä.

Tod. HT

□

Huom. Lause 1.26 seuraa lauseesta 1.27., koska suora tulo on puolisuoran tulon erikoistapaus.

Lause 1.28. Joukko $\tilde{N} = \{ (n, e_H) \in N \rtimes H \mid n \in N \}$ on $N \rtimes H$ in suljettu normaali aliryhmä ja kuvaus

$$i: N \rightarrow \tilde{N}$$

$$n \mapsto (n, e_H)$$

on top. ryhmien isomorfismi.

- Tod.
- $\tilde{N} = N \times \{e_H\} \in N \times H$ selvä
 - $(e_N, e_H) \in \tilde{N}$
 - $(n, e_H) * (n', e_H) = (n \underbrace{\varphi^*(e_H, n')}_{=n'}, e_H e_H) \in \tilde{N}$ } aliryhmä
 - $(n, e_H)^{-1} = (n^{-1}, e_H) \in \tilde{N}$

- normaaliuus: HT
- selvästi i on jatkuva bijektio, j.s. $i^{-1} = \text{pr}_1: N \times H \rightarrow N$ on jatkuva
- i homomorfismi:

$$i(n_1) * i(n_2) = (n_1, e_H) * (n_2, e_H) = (n_1 \underbrace{\varphi^*(e_H, n_2)}_{=n_2}, e_H) \quad \text{ok.}$$

□

Lause 1.29. Kuvaus $q: N \rtimes H \rightarrow H$
 $(n, h) \mapsto h$

on jatkuva surjektiivinen homomorfismi, jolle $\ker q = \tilde{N}$.

Tod.

- jatkuvuus ok. (projektio)
- surj. ok.
- homomorfismi:

$$q((n, h) * (n', h')) = q(\dots, hh') = hh'$$

$$q(n, h) \cdot q(n', h') = h \cdot h'$$

- $(n, h) \mapsto e_H \Leftrightarrow (n, h) = (n, e_H)$ jollakin $n \in N$
 $\Leftrightarrow (n, h) \in \tilde{N}$.

□

Lause 1.30. Kuvaus $\sigma: H \rightarrow N \rtimes H$
 $h \mapsto (e_N, h)$

on jatkuva homomorfismi, ja $q \circ \sigma = id_H$.

Tod.

- jatk. ok.
- homomorfismi:

$$\sigma(h_1) * \sigma(h_2) = (e_N, h_1) * (e_N, h_2)$$

$$= (e_N, \underbrace{q^*(h_1, e_N)}_{= e_N}, h_1 h_2) \text{ ok.}$$

- $q \circ \sigma(h) = q(e_N, h) = h \text{ ok.}$

□

Lause 1.31. $(N \rtimes H) / \tilde{N} \cong H$ topologisia ryhmiä.

Tod.

HT

□

Esim. 1.32. D_n n-kulmion symmetriat } Joukkoina void. qatella
 R_n -" - kierrat } $D_n \cong R_n \times \mathbb{Z}_2$
 $D_n \cong R_n \times \mathbb{Z}_2$ ($D_n \neq R_n \times \mathbb{Z}_2$)

$O(n) \cong SO(n) \times \mathbb{Z}_2$, yllertyiskohdat myöhemmin.

kalvo ▽
o

Ryhmien eksakti jono:

$$\dots \rightarrow G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \rightarrow \dots$$

Jono ryhmiä ja homomorfismeja on eksakti kohdassa G_n , jos

$$\text{im } f_{n-1} = \text{ker } f_n.$$

Jono on eksakti, jos se on eksakti jokaisessa kohdassa.

Muutoa $1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 1$ ($1 =$ triviaali ryhmä) olevaa eksaktia jonoa sanotaan lyhyeksi eksaktiksi jonoksi.

Esim. 1.33. 1) $1 \rightarrow 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1$
 $n \mapsto n \mapsto n_2$

2) tai yleisemmin jos $H \triangleleft G$ (normaali aliryhmä)

$$1 \rightarrow H \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} G/H \rightarrow 1.$$

3) Yllä olevassa tilanteessa

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} N \times H \xrightarrow{q} H \rightarrow 1$$

$\swarrow \sigma$

- i injektio ok.
- $\text{im } i = \tilde{N} = \text{ker } q$ ok.
- q surjektio ok.

Lisäksi oli määr. $\sigma: H \rightarrow N \times H$ s.e. $q \circ \sigma = \text{id}_H$. □

Lyhyttä eksaktia jonoa

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \xrightarrow{p} H \rightarrow 1$$

sanotaan halkeavaksi, jos \exists homomorfismi $s: H \rightarrow G$ s.e. $p \circ s = \text{id}_H$

Siis esimerkiksi 3) jono on halkeava.

Jokaisella $h \in H$ funktio s "valitsee" yhden alkion alkuluvusta $p^{-1}(h)$

Siis α on puolisuora tulo \implies halkeava jono.
Osoitamme, että myös käänteinen konstruktio onnistuu:

Teoreema 1.34. Olk. $1 \rightarrow N \hookrightarrow G \xrightarrow{p} H \rightarrow 1$
halkeava lyhyt eksakti jono. Tällöin on olemassa
 H -n jatkuva toiminta φ^* N :ssä (automorfismeilla)
s.e.
 $G \cong N \rtimes_{\varphi} H$ topologisina ryhminä.

Tod. Olk. $s: H \rightarrow G$ jatkuva homomorfismi s.e. $p \circ s = id_H$.
Määr.

$$\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$$

selvyydestä: olk. $h \in H$. Määritellään $\varphi(h): N \rightarrow N$
kaavalla

$$\varphi(h)(n) = \underbrace{s(h)}_{\in G} n \underbrace{s(h)^{-1}}_{\in G} \quad \forall n \in N.$$

Koska N on normaali G :ssä, niin $s(h)ns(h)^{-1} \in N$ ok.
($n = \ker(p)$)

Väite 1a. $\varphi(h)$ on ryhmäisomorfismi:

- $\varphi(h)(nn^{-1}) = s(h)nn^{-1}s(h)^{-1} = s(h)ns(h)^{-1}s(h)n^{-1}s(h)^{-1} = (\varphi(h)(n))(\varphi(h)(n^{-1}))$.
- Selvästi $\varphi(h^{-1}) \circ \varphi(h) = id_N = \varphi(h) \circ \varphi(h^{-1})$

Siis $\varphi(h)$ ryhmäisom., käänteiskuvauksenaan $\varphi(h^{-1})$. □ 1a.

Väite 1b. $\varphi(h): N \rightarrow N$ on homeomorfismi:

- $\varphi(h): h \mapsto s(h)ns(h)^{-1}$ (h kiinteä) jatkuva ok.
- 1a. \implies bijektio
- käänteiskuvaukset $\varphi(h^{-1})$ myös jatkuva. □ 1b.

Nyt 1a. & 1b. $\implies \varphi(h) \in \text{Aut}(N)$.

Väite 2. $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$ on homomorfismi

eli $\varphi(hh_1) = \varphi(h) \circ \varphi(h_1) \quad \forall h, h_1 \in H:$

$$\begin{aligned} \varphi(hh_1)(n) &= s(hh_1)ns(hh_1)^{-1} = s(hh_1)ns(\underbrace{hh_1^{-1}}_{=h_1^{-1}h^{-1}})^{-1} \\ &= s(h)\underbrace{s(h_1)ns(h_1)^{-1}}_{\varphi(h_1)(n)}s(h)^{-1} = (\varphi(h) \circ \varphi(h_1))(n). \end{aligned}$$

$\varphi(h)(\varphi(h_1)(n))$ □ 2.

Väite 3.

$$\varphi^* : H \times H \rightarrow N$$

$$(h, h) \mapsto \varphi(h)(h) \quad \text{on jatkuva:}$$

$$\parallel$$

$$s(h) n s(h)^{-1}$$

$$s \text{ jatk.}, \varphi \text{ jatk.}, \varphi \text{ jatk.} \Rightarrow \text{väite.} \quad \square 3.$$

Siis voidaan muodostaa puolisuora tulo $N \rtimes_{\varphi} H$.

Os. vielä, että $N \rtimes H \cong G$.

Määritellään $\gamma : N \rtimes_{\varphi} H \rightarrow G$
kaavalla

$$\gamma(n, h) = n s(h).$$

Väite 4. γ on jatkuva homomorfismi:

- γ on yhdistetty kuvaus

$$\begin{array}{ccc} N \times H & \xrightarrow{\text{id} \times s} & N \times G & \xrightarrow{\gamma} & G \\ (n, h) & \longmapsto & (n, s(h)) & \longmapsto & n s(h). \end{array}$$

- homomorfismi:

$$\gamma((n, h) * (n', h')) = \gamma(n \varphi(h)(n'), h h')$$

$$= n \varphi(h)(n') s(h h') = n s(h) n' s(h)^{-1} s(h) s(h')$$

$$= n s(h) n' s(h') = \gamma(n, h) \gamma(n', h'). \quad \square 4.$$

Määritellään sitten $\beta : G \rightarrow N \rtimes_{\varphi} H$
kaavalla

$$\beta(g) = \left(\underbrace{g \cdot s(p(g))^{-1}}_{\in N?}, \underbrace{p(g)}_{\in H} \right)$$

koska $N = \ker p$, riittää osoittaa, että

$$p(g \cdot s(p(g))^{-1}) = e_H :$$

$$= p(g) p(s(p(g))^{-1}) = p(g) \left[\underbrace{p(s(p(g)))}_{\text{id}} \right]^{-1}$$

$$= p(g) p(g)^{-1} = e_H.$$

Siis $\beta(g) \in N \times H$.

Väite 5. β on jatkuva ja $\beta^{-1} = \gamma^{-1}$:

β on jatkuva ok.

66
20

$$\begin{aligned}\beta = \gamma^{-1}; \quad (\beta \circ \gamma)(n, h) &= \beta(n s(h)) \\ &= (n s(h) \cdot s(p(n s(h)))^{-1}, \gamma(n s(h))) \\ &= (n s(h) \cdot s(\underbrace{p(n)}_{e_H} \underbrace{p(s(h))}_{id}))^{-1}, \underbrace{\gamma(n)}_{e_H} \underbrace{\gamma(s(h))}_{id}) \\ &= (n s(h) \cdot s(h)^{-1}, h) = (n, h).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\beta \circ \gamma)(g) &= \gamma(g \cdot s(p(g))^{-1}, p(g)) \\ &= g \cdot s(p(g))^{-1} s(p(g)) = g. \quad \square 5.\end{aligned}$$

Siis γ on ryhmien isomorfismi, γ jatkuva ja $\gamma^{-1} = \beta$ jatkuva, eli γ on top. ryhmien isomorfismi.

□ Teoreema 1.34.

Y.o. tilanne voidaan esittää kaaviona

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & G & \xrightarrow{\gamma} & H & \longrightarrow & 1 \\ & & i \downarrow \cong & & \beta \downarrow \cong & & id \downarrow \cong & & \\ 1 & \longrightarrow & \tilde{N} & \hookrightarrow & N \times_{\varphi} H & \xrightarrow{\gamma} & H & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

1.35. Esimerkki matriisiryhmistä

Tark. ortogonaalisista ryhmistä $O(n)$: Jos $A \in O(n)$,
on siis $A^t A = I$ ja

$$\det(A^t A) = \det(I) = 1$$

$$\det(A^t) \det(A) = \det(A)^2$$

$$\Rightarrow \det(A) = \pm 1.$$

Koska $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, niin

(*) $\det : O(n) \rightarrow \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$
on jatkuva homomorfismi.

Nyt $SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det(A) = 1 \}$,
 niin $SO(n)$ on jatkuvan homomorfismin (1) ydin,
 ja $SO(n)$ on siis $O(n)$:n suljettu normaali aliryhmä.

Saadon lyhyt eksakti jono

$$(**) \quad 1 \longrightarrow SO(n) \hookrightarrow O(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1.$$

Eksaktisuus kohdassa \mathbb{Z}_2 seuraa siitä, että $\det: O(n) \rightarrow \mathbb{Z}_2$
 on surjektio: esim.

$$\det(I) = 1, \quad \det \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Määr. sitten $s: \mathbb{Z}_2 \rightarrow O(n)$

$$s(a) = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

jolloin s on jatkuva homomorfismi ja $\det \circ s = \text{id}_{\mathbb{Z}_2}$;

siis jono $(**)$ on halkeava ja Teoreemasta 1.34

saadaan, että

$$O(n) \cong SO(n) \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_2.$$

Tässä $\varphi: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(SO(n))$

$$\varphi(a)(B) = s(a) B s(a)^{-1}, \quad a \in \mathbb{Z}_2, B \in SO(n)$$

kuten Teoreeman 1.34 todistuksessa.

Lisäksi Lause 1.31 $\Rightarrow O(n)/SO(n) \cong \mathbb{Z}_2$.

□

Lie ryhmistä

[A. Baker: Matrix Groups, an introduction to Lie group theory, Springer Undergraduate Math. Series]

Mää. 1.36.

sileä kuvaus: olk. $V_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, V_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ($n_1, n_2 \geq 1$)
kuvaus $g: V_1 \rightarrow V_2$ on sileä, jos se on ∞ kertaa differentioituva, eli jokaisella komponenttifunktiolla \exists kaikkia kertalukujen ositt. derivaatat.

diffeomorfismi: sileä bijektio g on diffeomorfismi, jos $g^{-1}: V_2 \rightarrow V_1$ on sileä.

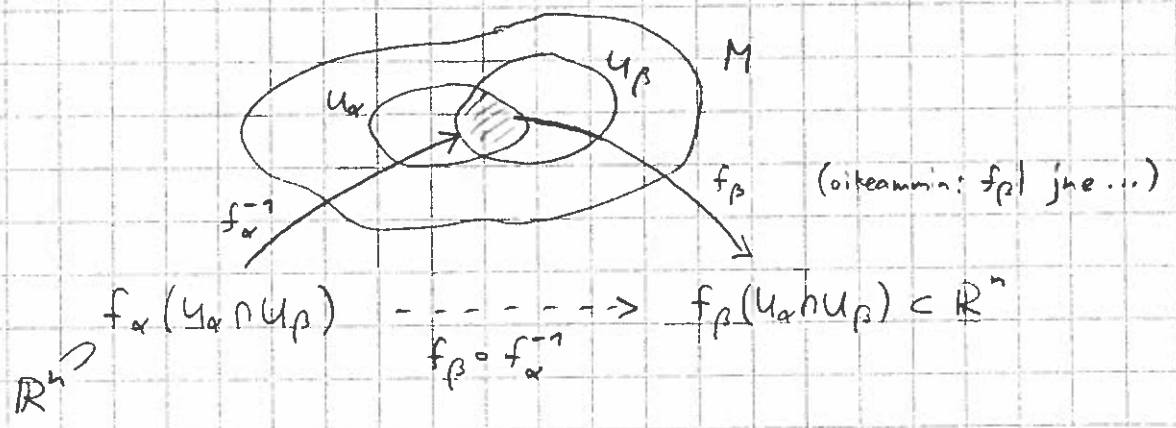
Olk. nyt M separoituva Hausdorff top. av. , $n \geq 1$.

Jos $U \in M$ ja $V \in \mathbb{R}^n$, niin homeomorfismia $f: U \rightarrow V$ sanotaan U in n -kartaksi

Jos $\mathcal{U} = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ on M in avoin peite ja $\mathcal{F} = \{f_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha, \alpha \in A\}$ on lokaalinen n -karti, niin \mathcal{F} on atlas (l. kartasto)

Mille, jos

$f_\beta \circ f_\alpha^{-1}: f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$
on diffeomorfismi $\forall \alpha, \beta$ joilla $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

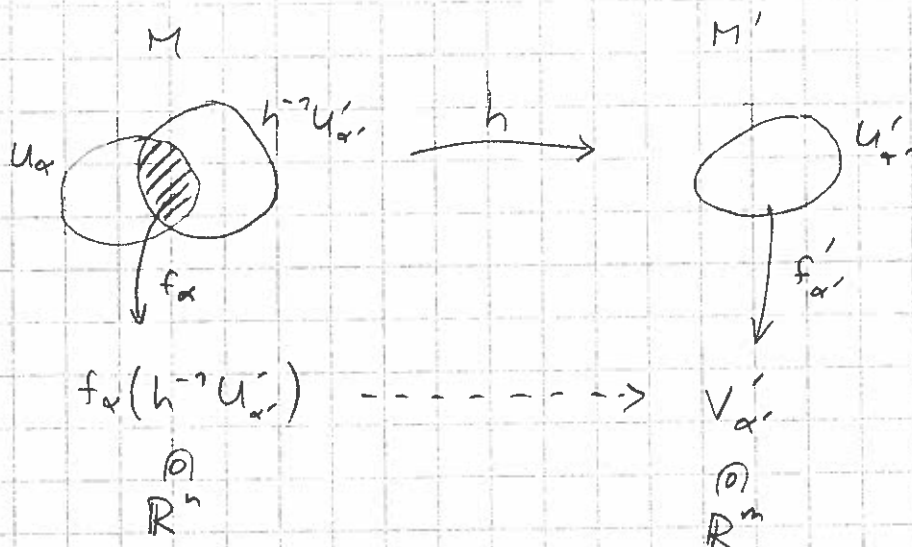


Kalvikkoo $(M, \mathcal{U}, \mathcal{F})$ on sileä (n -ulott.) monisto.

Määr. 1.37. Olk. $(M, \mathcal{U}, \mathcal{F})$ ja $(M', \mathcal{U}', \mathcal{F}')$ sileitä monistoja (ei välttämättä sama dimensio) ja $h: M \rightarrow M'$ jatkuva kuvaus. Kuvaus h on sileä, jos

$$f'_{\alpha'} \circ h \circ f_{\alpha}^{-1}: f_{\alpha}(h^{-1}U_{\alpha'}) \rightarrow V_{\alpha'} = f'_{\alpha'}(U_{\alpha'})$$

o- sileä \forall pareilla α, α' , joilla $h(U_{\alpha}) \cap U_{\alpha'} \neq \emptyset$.



Määr. 1.38. Olk. G sileä monisto, joka on myös topologinen ryhmä. (Tuloperuudelle $G * G$ voidaan luonn. tavalla määritellä sileän moniston struktura). Sanomme, että G on Lien ryhmä, jos $\mu: G * G \rightarrow G$ ja $\tau: G \rightarrow G$ ovat sileitä kuvauksia.

- Esim. 1.39.
- $(\mathbb{K}^*, +)$
 - $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
 - $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
 - $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$

Teoreema: Lien ryhmien suljettu aliryhmä on Lien ryhmä.

- (S^1, \cdot)
- $O(n), SL(n, \mathbb{R}), SO(n)$

Esim. 1.40. ^{Lok. lemp.} topologinen ryhmä, joka ei ole Lien ryhmä eikä diskreetti:

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$$

(numeroituva tulo ryhmistä \mathbb{Z}_2 , \approx Cantorin joukko)