HY Todennäköisyysteoria I, syksy 2013, kurssikokeen ratkaisut (14.11.2013)

Valitse kolme tehtävää tästä neljän tehtävän listasta ja vastaa tehtävien kysymyksiin. Jos jää aikaa voit toki vastata myös neljanteen tehtävään. Kokeen kesto on neljä tuntia.

Tehtävissä, kaikki satunnaismuuttujat elävät todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega) > 0$ P-melkein varmasti. Osoita

   (a)
   $$E_P(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt = \int_0^\infty P(X \geq t)dt$$

   (b) Osoita myös kun $K > 0$ (deterministinen)
   $$E_P\big(X\mathbf{1}(X > K)\big) = \int_K^\infty P(X > t)dt + KP(X > K)$$

   R.
   $$E_P\big(X\mathbf{1}(X > K)\big) = \int_0^\infty x\mathbf{1}(x > K)P(X \in dx) = \int_K^\infty \left(\int_0^x dy\right)P(X \in dx)$$
   $$= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{1}\big(x > K \vee y\big)dyP(X \in dx) = \text{ Fubini}$$
   $$= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{1}\big(x > K \vee y\big)P(X \in dx)dy =$$
   $$\int_0^\infty P(X > K \vee y)dy = \int_0^K P(X > K)dy + \int_K^\infty P(X > y)dy$$
   $$= KP(X > K) + \int_K^\infty P(X > y)dy$$

   Kun $K = 0$ saadaan $a)$ erikoistapauksena.

2. Muistetaan Lebesguen dominioidun konvergenssi lause. Jos $X(\omega)$ ja $X_n(\omega), n \in \mathbb{N}$ ovat satunnaismuuttujat jolla $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ P-melkein varmasti ja
   $$\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n(\omega)| \leq Y(\omega) \quad \text{jossa } E_P(Y) < \infty$$

siitä seuraa $\lim_{n\to\infty} E_P(X_n) = E_P(X)$.

Osoita: Jos $X_n \xrightarrow{P} X$ stokastisesti ja $|X_n(\omega)| \le K < \infty$ P-melkein varmasti jossa K on deterministinen, siitä seuraa

$$\lim_{n\to\infty} E_P\big(|X_n - X|\big) = 0$$

Vihje: Huomataan että

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| \le |X_n(\omega)| + |X(\omega)| \ \le 2K.$$

Käytä Tehtävan 1 odotusarvon esitystä (a).

R. Koska $X_n \overset{P}{\to} X$ stokastisesti, on olemassa deterministinen alijono n_k jolla

$$\lim_{k\to\infty} X_{n_k}(\omega) = X(\omega) \qquad P\text{-melkein varmasti}$$

ja koska $|X_{n_k}(\omega)| \le K$ P-m.v, siitä seuraa $|X(\omega)| \ \le K$, ja

$$|\ X_n(\omega) - X(\omega)| \ \le |\ X_n(\omega)| \ + |X(\omega)| \ \le 2K \quad \forall n \in \mathbb{N}\ P\text{-melkein varmasti}$$

Nyt

$$E_P\big(|X_n - X|\ \big) = \int_0^\infty P\big(|X_n - X| > t\big)\ dt = \int_0^{2K} P\big(|X_n - X| > t\big)\ dt =$$

jossa $P(|X_n - X| > 2K) = 0$.

Koska $X_n \overset{P}{\to} X$, seuraa $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \ > t) = 0$, ja koska

$$0 \le P(|X_n - X| \ > t) \le 1$$

Lebesgue dominoidun konvergenssin lause astuu voimaan kun integroidaan kompakti välissä $[0, 2K]$ Lebesgue mitan suhteen ja saadaan

$$\lim_{n\to\infty} E_P\big(|X_n - X|\ \big) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2K} P\big(|X_n - X| > t\big)\ dt$$
$$= \int_0^{2K} \lim_{n\to\infty} \Big(\ P\big(|X_n - X| > t\big)\ \Big) dt = 0$$

siis $X_n \overset{L^1(P)}{\to} X$ $\square$

3. Olkoon $\{ U_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ P-rippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttuja jolla

$$P(U_1 \in (a_1, b_1], \dots, U_n \in (a_n, b_n]\ ) = (b_1 - a_1)\dots(b_n - a_n)$$

$\forall 0 \le a_i < b_i \le 1$.

Olkoon $X_n(\omega) = \max\big\{ U_1(\omega), \dots, U_n(\omega)\big\}$

(a) Osoita että $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 1$ P-melkein varmasti.

R Olkoon $\varepsilon \in (0,1)$,

$$P\big(|X_n - 1| > \varepsilon\big) = P(X_n \le (1-\varepsilon)\big) =$$
$$P\big(U_1 \le (1-\varepsilon), U_2 \le (1-\varepsilon), \dots, U_n \le (1-\varepsilon)\big) =$$
$$P\big(U_1 \le (1-\varepsilon)\big)P\big(U_2 \le (1-\varepsilon)\big)\dots P\big(U_n \le (1-\varepsilon)\big) = (1-\varepsilon)^n$$

josta seuraa

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|X_n - 1| > \varepsilon\big) = 0$$

eli $X_n \xrightarrow{P} 1$ kun $n \to \infty$.

Koska $\sum_{n=0}^{\infty}(1-\varepsilon)^n = \varepsilon^{-1} < \infty$ kun $\varepsilon \in (0,1)$, Borel Cantelli lemmasta seuraa

$$P\Big(\limsup_n \big\{ \omega : |X_n(\omega) - 1| > 1/K\big\}\Big) = 0 \qquad \forall K \in \mathbb{N}$$

joka on yhtäpätevä kuin

$$0 = P\Big(\bigcup_{K\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\ge N} \big\{ \omega : |X_n(\omega) - 1| > 1/K\big\}\Big)$$

ja

$$1 = P\Big(\bigcap_{K\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\ge N} \big\{ \omega : |X_n(\omega) - 1| \le 1/K\big\}\Big) = P\Big(\big\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 1\big\}\Big)$$

(b) Laske odotusarvo $E_P(X_n)$.

Vihje Katso odotusarvon esitys (a) Tehtävässä 1.

R. Koska $X_n(\omega) \in [0,1]$ P-melkein varmasti,

$$E_P(X_n) = \int_0^\infty P(X_n > t)dt = \int_0^1 P(X_n > t)dt$$

jossa $P(X_n > t) = 1 - P(X_n \le t) = 1 - P(U_1 \le t, \dots U_n \le t) = 1 - t^n$. Tästä seuraa

$$E_P(X_n) = 1 - \int_0^1 P(X_n \le t)dt = 1 - \int_0^1 t^n dt = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Vihje Osoita ensin että $X_n \stackrel{P}{\longrightarrow} 1$ (stokastisesti) ja käytä sitten Borel Cantellin lemmaa.

(c) Osoita myös että minimien jonolla $Y_n(\omega) := \min\big\{ U_1(\omega), \dots, U_n(\omega)\big\}$ pätee $\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = 0$ P-melkein varmasti.

(d) Laske odotusarvo $E_P(Y_n)$.
Vihje : Koska $U_1(\omega)$ ja $(1 - U_1(\omega))$ ovat samoin jakautuneita, voisit osoittaa että Y_n ja $(1 - X_n)$ ovat samoin jakautuneita. **R.** Olkoon $\widetilde{U}_i = (1 - U_i)$. Koska $\widetilde{U}_i(\omega)$ on $U_i(\omega)$:n funktio ja satunnaosmuuttujat $(U_i : i \in \mathbb{N})$ ovat P-riippumattomia, seuraa että $(\widetilde{U}_i : i \in \mathbb{N})$ ovat myös P-riippumattomia. Huomataan myös että kun $0 \le a \le b \le 1$,

$$P\big(\widetilde{U}_i \in (a, b]\big) = P\big(U_i \in (1 - b, 1 - a]\big) = (1 - a) - (1 - b) = b - a$$

eli $\widetilde{U}_i$ ovat myös tasajakautuneita välissä $[0, 1]$, ja Väite seuraa koska

$$Y_n(\omega) = \min\big\{ U_1(\omega), \dots, U_n(\omega)\big\} = 1 - \max\big\{ 1 - U_1(\omega), \dots, 1 - U_n(\omega)\big\}$$
$$= 1 - \min\big\{ \widetilde{U}_1(\omega), \dots, \widetilde{U}_n(\omega)\big\} \longrightarrow 1 \ P\text{-m.v. kun } n \to \infty$$

josta seuraa $E_P(Y_n) = 1 - E_P(X_n) = \frac{1}{n+1}$.

4. Olkoon $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ P-riippumattomia ja samoinjakautuneita eksponentiaalisia satunnaismuuttujia,

$$P_\lambda(X_n > t) = \big\{ \ \exp(-\lambda t) \quad \text{kun } t > 0 \ 1 \quad \text{kun } t \le 0$$

jossa $\lambda > 0$ ja olkoon

$$S_n(\omega) = X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)$$

(a) Laske momentti-generoiva funktio

$$m(\theta) := E_\lambda(\exp(\theta S_n))$$

Vihje: laske $E_\lambda(\exp(\theta X_n))$ ja käytä riippumattomuutta.

R. Koska $-\frac{dP_\lambda(X_1>t)}{dt} = \lambda\exp(-\lambda t)\mathbf{1}(t \geq 0)$ on λ- eksponentialisen jakauman tiheysfunktio, seuraa

$$E_\lambda\big(\exp(\theta X_1)\big) = \int_0^\infty \lambda\exp\big((\theta-\lambda)x\big)dx = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda-\theta} & \theta < \lambda \\ +\infty & \theta \geq \lambda \end{cases}$$

Koska satunnaismuuttujat$X_1, \dots, X_n$ ovat P-riippumattomia ja samoin jakautuneita,

$$\begin{aligned} & E_\lambda\big(\exp(\theta S_n)\big) = E_\lambda\big(\exp(\theta(X_1 + \cdots + X_n))\big) = \\ & \prod_{i=1}^n E_\lambda\big(\exp(\theta(X_i))\big) = E_\lambda\big(\exp(\theta(X_1))\big)^n \\ & = \begin{cases} \Big(\lambda/(\lambda-\theta)\Big)^n & \theta < \lambda \\ +\infty & \theta \geq \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Laske odotusarvot $E_P(S_n)$ ja $E_P(S_n^2)$
R. Koska $X(\omega) \geq 0$ P-melkein varmasti

$$\begin{aligned} & E_\lambda(X_1) = \int_0^\infty P_\lambda(X_1 > t)dt = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda}, \\ & E_\lambda(X_1^2) = \int_0^\infty P_\lambda(X_1^2 > t)dt = \int_0^\infty P_\lambda(X_1 > \sqrt{t})dt = \\ & \int_0^\infty P_\lambda(X_1 > u)2udu = 2\int_0^\infty \exp(-\lambda u)udu = \frac{2}{\lambda}E_\lambda(X_1) = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

(muttujan vaihdolla $u = \sqrt{t}$). seuraa

$$\begin{aligned} & E_\lambda(S_n) = E_\lambda(X_1) + \cdots + E_\lambda(X_n) = nE_\lambda(X_1) = n\lambda \\ & E_\lambda(S_n^2) = E_\lambda\Big((X_1 + \cdots + X_n)^2\Big) = \\ & \sum_{i=1}^n E_\lambda(X_i)^2 + 2\sum_{i<j} E_\lambda(X_iX_j) = nE_\lambda(X_1^2) + n(n-1)E_\lambda(X_1)^2 = \frac{n^2+n}{\lambda^2} \end{aligned}$$