HY Todennäköisyysteoria I syksy 2013, kurssikoe (30.10.2013)

Valitse kolme tehtävää tästä neljän tehtävän listasta ja vastaa tehtävien kysymyksiin. Jos jää aikaa voit toki vastata myös neljanteen tehtävään.

Tehtävissä, kaikki satunnaismuuttujat elävät todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. Muistetaan monotonisen konvergenssin lause: Jos $0 \le X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ P-melkein varmasti kun $n \to \infty$, siitä seuraa $E_P(X_n) \uparrow E_P(X) \in [0, +\infty]$.

   (a) Todista Fatou'n lemma monotonisen konvergenssin lauseen perusteella, eli kun satunnaismuuttujen jono $X_n(\omega) \ge 0$ P-melkein varmasti $\forall n \in \mathbb{N}$, siitä seuraa

   $$E_P\big(\liminf_n X_n\big) \le \liminf_n E_P\big(X_n\big)$$

   R. Fatou Lemma löytyy tn-teorian kirjioista ja luennoitsijan monisteesta (Lemma 4.1.4).

   (b) Käänteis-Fatou lemma koskee $\limsup_n X_n(\omega)$,

   $$E_P\big(\limsup_n X_n\big) \ge \limsup_n E_P(X_n)$$

   mutta millä oletuksilla se pätee ? Todista Käänteis-Fatou lemma.
   R Tämä ei päde ilman lisäoltuksia (Lemma 4.1.5) luennoitsijan monisteesta: Riittävä ehto on: on olemassa integroituva yläraja $Y(\omega) \in L^1(P)$ jolla

   $$X_n(\omega) \le Y(\omega) \qquad P\text{-melkein varmasti } \forall n \in \mathbb{N}$$

   (c) Olkoon $\{ X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ ja $X(\omega)$ satunnaismuuttujat jolla

   $$\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \qquad P\text{-melkein varmasti} \tag{0.1}$$

   Esitä riittävä ehto odotusarvojen konvergenssille $E_P(X_n) \to E_P(X)$.
   R. Lebesgue dominoidun konvergensin lauseen mukaan (Lause 4.1.1 luennoitsijan monisteesta), $E(X_n) \to E(X)$ kun $X_n(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti ja on olemassa integroituva yläraja $Y \in L^1(P)$ jolla

   $$|X_n(\omega)| \le Y(\omega) \qquad P\text{-melkein varmasti } \forall n \in \mathbb{N}$$

Esitä myös vastaesimerkki jossa $\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ P-melkein varmasti mutta $E_P(X_n)$ ei suppene kohti $E_P(X)$.

R. Katso Esimerkki (4.1.1) luennoitsijan monisteesta.

2. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $G(\omega)$ standardi Gaussinen satunnaismuuttuja jolla

$$P(G \le t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \tag{0.2}$$

(a) Laske odotusarvo $E_P\Big(\exp\big(G^2\lambda/2\big)\Big) \in [0, +\infty]$ kun $\lambda \in \mathbb{R}$.

R.

$$E_P\Big(\exp\big(G^2\lambda/2\big) = \int_{\mathbb{R}} \exp\big(x^2\lambda/2\big) P(G \in dx) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\big(x^2\lambda/2\big) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{x^2(1-\lambda)}{2}\right) dx$$

joka saa arvo $+\infty$ jos $\lambda \le 0$, ja kun $\lambda > 0$, muuttujan vaihdolla $y = x\sqrt{1-\lambda}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \left|\frac{dx}{dy}\right| dy = (1-\lambda)^{-1/2} P(G \in \mathbb{R}) = (1-\lambda)^{-1/2}$$

(b) Laske sitten oikean puolen yläraja seuraavan Chernoffin epäyhtälostä.

$$P(|G| \ge t) = P\left(\exp\left(\frac{\lambda\, G^2}{2}\right) \ge \exp\left(\frac{\lambda\, t^2}{2}\right)\right) \quad \forall \lambda > 0$$

$$\Longrightarrow P(|G| \ge t) \le \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{ \exp\left(-\frac{\lambda t^2}{2}\right) E_P\left(\exp\left(\frac{\lambda G^2}{2}\right)\right)\right\}$$

Vihje Etsi funktion minimin derivoimalla funktion logaritmin.

R. Minimoidaan λ:n suhteen funktio

$$\lambda \mapsto -\frac{\lambda t^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1-\lambda)$$

Koska minimi-kohdalla λ_* derivaatta saa arvo nolla silloin kun se on olemassa, saadan $\lambda_* = 1 - t^{-2}$, ja sijoittamalla

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{ \exp\left(-\frac{\lambda t^2}{2}\right) (1-\lambda)^{-1/2} \right\} = \exp\left(-\frac{\lambda_* t^2}{2}\right) (1-\lambda_*)^{-1/2} = \exp\left(\frac{1-t^2}{2}\right) t$$

$$P(|G| \ge t) \le \min\left\{1, \exp\left(\frac{1-t^2}{2}\right) t \right\}$$

3. Olkoon $\varepsilon > 0$, ja $(X_n(\omega) \in \mathbb{N})$ jono satunnaismuuttujia (ei välttämättä riippumattomia !) jolla

$$P\Big(X_n = (n^{(1+\varepsilon)} - 1)\Big) = n^{-(1+\varepsilon)} = 1 - P\big(X_n = -1\big)$$

Pelin tulkinta: X_n on pelaajan voitto arpajaisissa jossa arpalippu maksaa 1 €, ja voittaa $n^{(1+\varepsilon)}$ € todennäköisyydellä $n^{-(1+\varepsilon)}$.

(a) Osoita: $E_P(X_n) = 0$

R

$$E_P(X_n) = (n^{(1+\varepsilon)} - 1)P(X_n = (n^{(1+\varepsilon)} - 1) - P(X_n = -1) =$$
$$\big(n^{(1+\varepsilon)} - 1\big)n^{-(1+\varepsilon)} - \big(1 - n^{-(1+\varepsilon)}\big) = 0$$

(b) Osoita :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} \begin{cases} = \infty & \text{kun } \varepsilon \leq 0 \\ < \infty & \text{kun } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

R.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} \leq \int_1^{\infty} x^{-(1+\varepsilon)} dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} x^{-(1+\varepsilon)} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

ja siitä seuraa että

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} < \infty \Longleftrightarrow \int_1^{\infty} x^{-(1+\varepsilon)} dx < \infty$$

jossa oikean puolen integraali on laskettavissa:

$$\int_1^t x^{-(1+\varepsilon)} dx = \begin{cases} \varepsilon^{-1}(1 - t^{-\varepsilon}) & \text{kun } \varepsilon \neq 0 \\ \log(t) - \log(1) = \log(t) & \text{kun } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

ja siksi

$$\int_1^{\infty} x^{-(1+\varepsilon)} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-(1+\varepsilon)} dx = \begin{cases} \varepsilon^{-1} < \infty & \text{kun } \varepsilon > 0 \\ +\infty & \text{kun } \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

(c) Olkoon $S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$. Osoita että todennäköisyydellä $P = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = -1$$

Vihje: käytä Borel Cantellin lemma (kumpi ?).

Eli vaikka peli on odotusarvon mielessä reilu, pelaaja joka jatkaa pelaamaan lopulta häviää pystyyn! **R.** Koska oletetusti $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_n \neq -1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-(1+\varepsilon)} < \infty$$

ensimmäisen Borel Cantelli lemman nojalla seuraa

$$P\Big(\limsup_n \big\{\ \omega :\ X_n(\omega) \neq -1\big\}\Big) = 0$$

ja siksi

$$P\Big(\liminf_n \big\{\ \omega :\ X_n(\omega) = -1\big\}\Big) = 1$$

Eli P-melkein varmasti, on olemassa $N(\omega) < \infty$ jolla $X_n(\omega) = -1$ $\forall n > N(\omega)$.

Tästä seuraa että P-melkein varmasti, $\forall n > N(\omega)$

$$\frac{S_n(\omega)}{n} = \frac{S_{N(\omega)}(\omega)}{n} - \frac{n - N(\omega)}{n}$$

josta seuraa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{N(\omega)}(\omega)}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{n - N(\omega)}{n} = 0 - 1$$

4. Muistetaan satunnaismuuttujen jonon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ stokastisen konvergenssin määritelmä:

$$X_n \xrightarrow{P} 0 \quad \iff \forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\big(|X_n| > \varepsilon\big) = 0$$

Osoita:

(a) Jos $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0$ P-melkein varmasti, siitä seuraa $X_n \xrightarrow{P} 0$ (stokastisesti). **R.** Lause (6.0.1.1) luennoitsijan monisteesta.

(b) Jos $X_n \xrightarrow{P} 0$ (stokastisesti), on olemassa deterministinen alijono $(n_k : k \in \mathbb{N})$ jolla $\lim_{k\to\infty} X_{n_k}(\omega) = 0$ P-melkein varmasti.

Vihje Muista Borel Cantellin lemma.

R. Lause (6.0.1.2) luennoitsijan monisteesta.

(c) Jos $X_n \xrightarrow{L^q} 0$, eli $\lim_{n\to\infty} E_P\big(|X_n|^q\big) = 0$ jossa $q > 0$, siitä seuraa $X_n \xrightarrow{P} 0$ (stokastisesti).

Vihje Muista Chebychevin epäyhtälö.

R. Teoreema (7.0.1) luennoitsijan monisteesta.

(d)

$$X_n \xrightarrow{P} 0 \text{ (stokastisesti) } \iff d(X_n, 0) := E_P\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) \longrightarrow 0 \text{ kun } n \to \infty$$

R. Teoreema (6.0.1) luennoitsijan monisteesta.