Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Potentiaaliteoria
Harjoitus 5, ratkaisuehdotuksia
26.11.2012

1. Todista, että $(x, y) \mapsto U_y(x) - U_{\overline{y}}(x)$, missä $\overline{y} = (y_1, \ldots, -y_n)$, on puoliavaruuden $\{x : x_n > 0\}$ Greenin funktio.
ratk. Merkitään kyseistä aluetta H:lla, ja olkoon $y \in H$. Riittää näyttää, että funktion $x \mapsto U_y(x)$ suurin harmoninen minorantti H:ssa on $h_y = x \mapsto U_{\overline{y}}(x)$.

Koska $y \in H$, pätee $\overline{y} \notin \overline{H}$, joten h_y on harmoninen H:ssa. Olkoon sitten $h \in \mathcal{H}(H)$ ja $h \leq U_y$. Silloin

$$\limsup_{x \to r \in \partial H} h(x) \leq \limsup_{x \to r \in \partial H} U_y(x) = U_y(r) = U_{\overline{y}}(r)$$

ja lisäksi

$$\limsup_{|x| \to \infty} h(x) \leq \limsup_{|x| \to \infty} U_y(x) = 0 = \limsup_{|x| \to \infty} U_{\overline{y}}(x).$$

Vertailuperiaatteen nojalla siis $h \leq U_{\overline{y}}$ koko alueessa H. Tämä todistaa halutun väitteen.

2. Todista, että jos $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots$ ja $\Omega = \cup_j \Omega_j$ ovat Greenin alueita, niin $G_{\Omega_1} \leq G_{\Omega_2} \leq \ldots$ ja $G_\Omega = \lim_{j \to \infty} G_{\Omega_j}$.
ratk. Kiinnitetään $j \in \mathbb{N}$ ja olkoon $y \in \Omega_j$. Olkoon $h_{j,y}$ on funktion U_y suurin harmoninen minorantti alueessa Ω_j. Silloin erityisesti $h_{j+1,y} \leq h_{j,y}$ (missä $h_{j+1,y}$ on funktion U_y suurin harmoninen minorantti alueessa Ω_{j+1}), sillä $h_{j+1,y}$ on harmoninen Ω_j:ssa ja $h_{j+1,y} \leq U_y$ alueessa Ω_j. Silloin

$$G_{\Omega_j}(x, y) = U_y(x) - h_{j,y}(x) \leq U_y(x) - h_{j+1,y}(x) = G_{\Omega_{j+1}}(x)$$

kaikilla $x \in \Omega_j$. Siis $G_{\Omega_j} \leq G_{\Omega_{j+1}}$. Sama päättely osoittaa, että $G_{\Omega_j} \leq G_\Omega$ kaikilla j. (Huomaa, että tässä käytetään aidosti oletusta, että myös Ω on Greenin alue.)

Todistetaan seuraavaksi raja-arvoa koskeva väite. Olkoon $y \in \Omega$. Silloin on olemassa jokin $j_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $y \in \Omega_j$ kaikilla $j \geq j_0$. Saamme siis kasvavan jonon $(-h_{j,y})_{j \geq j_0}$ harmonisia funktioita. Lauseen 6.14 nojalla rajafunktio $-g_y$ on joko harmoninen tai identtisesti ääretön jokaisessa Ω:n komponentissa. Kannattaa tässä kohdin huomata, että tarvitaan pieni argumentti, jotta g_y saadaan määritellyksi koko Ω:ssa, kun jonon jäsenet on määritelty ainoastaan Ω_j:ssa; nimittäin, jos $x \in \Omega$, ja $\overline{B}(x, r) \subset \Omega$, löytyy j_1 siten, että $\overline{B}(x, r) \subset \Omega_j$ kaikilla $j \geq j_1$. Siten jono $(-h_{j,y}|_{B(x,r)})_{j \geq j_1}$ suppenee kohti funktioita $-g_y|_{B(x,r)}$, joka on joko harmoninen tai identtisesti ääretön. Toisaalta

$$U_y(x) - g_y(x) = \lim_{j\to\infty}(U_y(x) - h_{j,y}(x)) \le G_\Omega(x,y)$$

joten $-g_y$ ei voi olla identtisesti ääretön missään komponentissa.

Nyt g_y on Ω:ssa harmoninen funktio, jolle pätee $g_y \le U_y$ (koska tämä epäyhtälö pätee kaikille $h_{j,y}$). Siis $g_y \le h_{y,\Omega}$, missä $h_{y,\Omega}$ on U_y:n suurin harmoninen minorantti alueessa Ω. Siten

$$U_y(x) - g_y(x) \ge U_y(x) - h_{y,\Omega}(x) = G_\Omega(x,y)$$

joten olemme todistaneet yhtäsuuruuden.

3. Todista, että jos h on superharmonisen funktion u suurin harmoninen minorantti ja v on subharmoninen siten, että $v \le u$, niin $v \le h$.
ratk. Määritellään (pisteittäin) $w = \sup\{v : v \le u,\ v \text{ subharmoninen}\}$. Selvästi $h \le w \le u$ (h on yksi kandidaatti joukossa, jonka yli supremum otetaan). Riittää todistaa, että $w \le h$.

Merkitään funktion u määrittelyaluetta Ω:lla. Olkoon $\overline{B}(x,r) \subset \Omega$. Jos $v \le u$ on subharmoninen, niin v:n Poissonin modifikaatio (harmoninen modifikaatio) $\tilde{v}$ kiekossa $B(x,r)$ on subharmoninen, $v \le \tilde{v}$ ja $\tilde{v}$ on harmoninen kiekossa $B(x,r)$. Siten pisteittäinen supremum voidaan ottaa yli subharmonisten funktioiden v', jotka ovat harmonisia kiekossa $B(x,r)$. Funktioiden $v'|_{B(x,r)}$ pisteittäinen supremum $w|_{B(x,r)}$ on silloin harmoninen tai identtisesti ääretön. Jälkimäinen vaihtoehto ei kuitenkaan voi olla voimassa, sillä $w \le u < \infty$ jossakin pisteessä. Täten w on jokaisessa pisteessä harmoninen. Erityisesti tästä seuraa, että $w \le h$, sillä h on suurin harmoninen minorantti, ja tämän epäyhtälön halusimmekin todistaa.

5. Todista, että jos μ_u on superharmonisen funktion u Rieszin mitta avoimessa joukossa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja $n \ge 3$, niin

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu_u(B(x,r))}{r^{n-2}} = 0 \text{ melkein kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.$$

ratk. Voimme koko ajan olettaa, että $\overline{B}(x,2r) \subset \Omega$. Rieszin mitan määritelmästä saadaan arvio

$$|\mu_u(B(x,r))| \le |\int_\Omega \varphi d\mu_u| = |\frac{1}{\alpha_n}\int_\Omega u\Delta\varphi|,$$

kun $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on sellainen funktio, jolle $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi|_{B(x,r)} \equiv 1$ ja $spt\varphi \subset B(x,2r)$. Käyttämällä vielä hyväksi tietoa

$$\int_\Omega \Delta\varphi = 0$$

saamme arvion

$$\mu_u(B(x,r)) \leq \frac{1}{\alpha_n}|\int_{B(x,2r)}(u-u_{B(x,2r)})\Delta\varphi| \leq Cr^n\|\Delta\varphi\|_\infty \fint_{B(x,2r)}|u-u_{B(x,2r)}|dx.$$

Koska tiedämme, että

$$\lim_{r\to 0}\fint_{B(x,2r)}|u-u_{B(x,2r)}|dx = 0$$

melkein kaikilla x, riittää tehtävän väitteen todistamiseksi etsiä φ, jolle $\|\Delta\varphi\|_\infty \leq Cr^{-2}$. Tämä järjestyy helposti ottamalla $\varphi(y) = g((y-x)/r)$, missä $g \in C_0^\infty$, $g|_{B(0,1)} \equiv 1$, $spt g \subset B(0,2)$ ja $0 \leq g \leq 1$.

6. Todista, että luentojen lauseiden 8.11-13 jatkeet ovat yksikäsitteisiä.
ratk. Olkoot u_1 ja u_2 kaksi u:n superharmonista jatkoa. Silloin $u_1(x) = u_2(x) = u(x)$ kaikilla $x \in \Omega \setminus E$. Koska E on polaari, E on nollamittainen. Laskutehtävän 4.10 nojalla $u_1 = u_2$.