

**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**

**Potentiaaliteoria**

**Harjoitus 5**

**26.11.2012**

1. Todista, että  $(x, y) \mapsto U_y(x) - U_{\bar{y}}$ , missä  $\bar{y} = (y_1, \dots, -y_n)$ , on puoliava-ruuden  $\{x : x_n > 0\}$  Greenin funktio.
2. Todista, että jos  $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$  ja  $\Omega = \cup_j \Omega_j$  ovat Greenin alueita, niin  $G_{\Omega_1} \subset G_{\Omega_2} \subset \dots$  ja  $G_{\Omega} = \lim_{j \rightarrow \infty} G_{\Omega_j}$ .
3. Todista, että jos  $h$  on superharmonisen funktion  $u$  suurin harmoninen minorantti ja  $v$  on subharmoninen siten, että  $v \leq u$ , niin  $v \leq h$ .
4. Todista, että jos  $u$  on ei-negatiivinen superharmoninen funktio  $\Omega$ :ssa, niin on olemassa Greenin potentiaalit  $G_{\Omega} \mu_j$  siten, että  $u = \lim_{j \rightarrow \infty} G_{\Omega} \mu_j$ .
5. Todista, että jos  $\mu_u$  on superharmonisen funktion  $u$  Rieszin mitta avoimessa joukossa  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ja  $n \geq 3$ , niin

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_u(B(x, r))}{r^{n-2}} = 0 \quad \mu \text{ melkein kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.$$

6. Todista, että luentojen lauseiden 8.11-13 jatkeet ovat yksikäsitteisiä.