Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Potentiaaliteoria
Harjoitus 4
29.10.2012

1. Osoita, että alhaalta puolijatkuvat funktiot saavat minimin kompakteissa joukoissa.

1. Osoita, että jos $\mathcal{A}$ on perhe alhaalta puolijatkuvia funktioita $f : A \to \mathbb{R}$, niin $x \mapsto \inf\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}, x \in A$, on alhaalta puolijatkuva.

3. Osoita, että jos u ja v ovat superharmonisia, $\min\{u, v\}$ on superharmoninen. Anna esimerkki tapauksesta, jossa $\max\{u, v\}$ ei ole superharmoninen.

4. Olkoon $a \in \mathbb{R}^n$. Määritellään $u_a : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ asettamalla $u_a(a) = \infty$ ja kun $x \neq a$, $u_a(x) = -\log|x - a|$, jos $n = 2$, ja $u_a(x) = |x - a|^{2-n}$, jos $n > 2$. Todista, että u on superharmoninen.

5. Anna esimerkki $\mathbb{R}^n$:n superharmonisesta funktiosta, joka ei ole missään pisteessä jatkuva.

6. Olkoon $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ alhaalta puolijatkuva funktio, joka ei ole identtisesti ääretön missään Ω:n komponentissa. Todista, että u on superharmoninen, jos ja vain jos jokaisella $x \in \Omega$ on olemassa $r_x > 0$ siten, että

$$u(x) \geq S(u, x, r) := \int_{S^{n-1}} u(x + r\zeta) d\sigma\zeta \text{ kaikilla } 0 < r < r_x.$$

7. Todista edellisen väite, kun pallokeskiarvot on korvattu kuulakeskiarvoilla $M(u, x, r) := \frac{1}{m_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u dm_n$.

8. Olkoon $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ superharmoninen ja $\overline{B}(x, r_0) \subset \Omega$. Todista, että keskiarvot $S(u, x, r)$ ja $M(u, x, r)$ ovat r:n väheneviä funktiota välillä $(0, r_0]$.

9. Todista, että edellisen tehtävän tilanteessa kaikilla $0 < r \leq r_0$ ja $x \in \Omega$,

$$S(u, x, r) \leq M(u, x, r)$$

ja

$$u(x) = \lim_{r \to 0} S(u, x, r) = \lim_{r \to 0} M(u, x, r)$$

.

10. Todista, että jos $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ ovat superharmonisia ja $u(x) = v(x)$ melkein kaikilla $x \in \Omega$, niin $u = v$.

11. Olkoot $u : \Omega \to \mathbb{R}$ superharmoninen, $U \subset \Omega$ avoin siten että $d(U, \partial\Omega) = d$ ($d = \infty$, jos $\Omega = \mathbb{R}^n$) ja μ äärellinen Borelin mitta, jonka kantaja $spt\mu \subset B(0, d)$. Todista, että konvoluutio $\mu * u$,

$$\mu * u(x) = \int u(x - y) d\mu y,$$

on superharmoninen U:ssa.

12. Olkoon $R_\alpha, 0 < \alpha < n$, Rieszin ydin: $R_\alpha(x) = |x|^{\alpha - n}$. Todista, että R_α on superharmoninen $\mathbb{R}^n$:ssä, kun $2 \leq \alpha < n$, ja subharmoninen $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:ssa, kun $0 < \alpha \leq 2$. Miksei R_α ole superharmoninen $\mathbb{R}^n$:ssä, kun $\alpha \geq n$, ja subharmoninen koko $\mathbb{R}^n$:ssa, kun $0 < \alpha \leq 2$.

13. Olkoon μ äärellinen Borelin mitta $\mathbb{R}^n$:ssä. Todista, että μ:n Rieszin potentiaali R_μ^α,

$$R_\mu^\alpha(x) = \int R_\alpha(x - y) d\mu y,$$

on superharmoninen $\mathbb{R}^n$:ssä, kun $2 \leq \alpha < n$, ja subharmoninen $\mathbb{R}^n \setminus spt\mu$:ssa, kun $0 < \alpha \leq 2$.

14. Olkoot $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ superharmoninen ja $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$. Todista, että $\tilde{u}$ on superharmoninen, missä $\tilde{u}(x) = P_{a,r}(u)(x)$, kun $x \in B(a, r)$, ja $\tilde{u}(x) = u(x)$, kun $x \in \Omega \setminus B(a, r)$.

15. Olkoot $u_j : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, j = 1, 2$, superharmonisia ja v_j u_j:n suurin harmoninen minorantti. Osoita, että $v_1 + v_2$ on $u_1 + u_2$:n suurin harmoninen minorantti.