Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Potentiaaliteoria
Harjoitus 3
8.10.2012

1. Olkoon u harmoninen $\mathbb{R}^n$:ssa siten, että $u(x,0) = 0$ kaikille $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. Osoita, että $u(x,-y) = -u(x,y)$ kaikille $(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

2. Osoita, että jos u on rajoitettu ja harmoninen joukossa

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\} \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq 1/2, x_2 = x_3 = 0\},$$

niin u voidaan jatkaa harmoniseksi funktioksi koko kuulaan $B(0,1)$.

3. Todista, että jos $u_j : \Omega \to (0,\infty), j = 1,2\ldots,$ ovat harmonisia funktioita siten, että $\lim_{j\to\infty} u_j(x) = u(x) \in \mathbb{R}$ kaikilla $x \in \Omega$, niin suppeneminen on tasaista Ω:n kompakteissa osajoukoissa ja u on harmoninen.

4. Olkoon $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ Ω:n diskreetti osajoukko. Karakterisoi positiiviset harmoniset funktiot $\Omega \setminus A$:ssa.

5. Todista luentojen Lauseen 4.2 yksikäsitteisyys, kun $n \geq 3$: jos $u, v : R^n \setminus B(0,1) \to \mathbb{C}$ ovat jatkuvia, harmonisia $R^n \setminus \overline{B}(0,1)$:ssä, $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \lim_{|x|\to\infty} v(x) = 0$ ja $u(x) = v(x)$, kun $x \in S^{n-1}$, niin $u = v$.

6. Olkoot $\zeta_0 \in S^{n-1}, r > 0$ ja $C = \{\zeta \in S^{n-1} : |\zeta - \zeta_0| \leq r\}$. Osoita, että on olemassa rajoitettu harmoninen funktio $\mathbb{R}^n \setminus C$:ssä, joka ei ole vakio.