Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Potentiaaliteoria
Harjoitus 2
1.10.2012

1. Osoita, että jokainen radiaalinen harmoninen funktio $B(0,1)$:ssä on vakio. u on radiaalinen, jos se on muotoa $u(x) = g(|x|)$.

2. Todista edellisen avulla aikaisemmin todistettu yhtälö

$$\int_{\partial B(0,1)} P(x,\zeta) d\sigma\zeta = 1.$$

3. Johda kaava kuulan $B(a,r)$ Poissonin ytimelle.

4. Pallon S^{n-1} äärellisen Borelin mitan μ Poissonin integraali on

$$P(\mu)(x) = \int_{S^{n-1}} P(x,\zeta) d\mu\zeta, \; x \in B(0,1).$$

Osoita, että $P(\mu)$ on harmoninen, mutta ei välttämättä rajoitettu. Osoita että se on rajoitettu, jos μ on muotoa $f\sigma$ missä f on ei-negatiivinen rajoitettu Borelin funktio.

5. Anna esimerkki rajoitetusta harmonisesta funktiosta $B(0,1)$:ssä, joka ei ole tasaisesti jatkuva.

6. Olkoon u harmoninen $B(0,1) \setminus \{0\}$:ssa siten, että $|x|^{n-2}u(x) \to 0$, kun $x \to 0$. Osoita, että 0 on u:n poistuva singulariteetti.

7. Osoita, että jos u on rajoitettu harmoninen funktio $B(0,1)$:ssä, niin

$$\sup_{x \in B(0,1)} (1-|x|)|\nabla u(x)| < \infty.$$

Todista, että harmonisten funktioiden $u : B(0,1) \to \mathbb{C}$ joukko, joille

$$\|u\|_B := |u(0)| + \sup_{x \in B(0,1)} (1-|x|)|\nabla u(x)| < \infty$$

on Banachin avaruus, ns. Blochin avaruus, normilla $\| \cdot \|_B$.