Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Potentiaaliteoria
Harjoitus 1
24.9.2012

1. Osoita, että $x \mapsto |x|^{2-n}$ on harmoninen $\mathbb{R}^n$:ssä, kun $n \geq 3$.

2. Osoita, että äärellisen Borelin μ mitan potentiaali U_μ,

$$U_\mu(x) = \int |x-y|^{2-n} d\mu y,$$

on harmoninen μ:n kantajan $\mathrm{spt}\mu = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(B(x,r)) > 0 \forall r > 0\}$ komplementissa ($n \geq 3$).

3. Todista, että ortogonaaliset lineaarikuvaukset säilyttävät harmonisuuden ja anna esimerkki lineaarikuvauksesta, joka ei säilytä.

4. Todista kaavat

$$\Delta u = div(\nabla u), \Delta(uv) = u\Delta(v) + 2\nabla u \cdot \nabla v + v\Delta(u).$$

5. Olkoot u ja v harmonisia. Osoita, että uv on harmoninen, jos ja vain jos $\nabla u \cdot \nabla v = 0$, ja u^2 on harmoninen, jos ja vain jos u on vakio. Oleta, että u ja v tai u ovat reaaliarvoisia, jos täytyy. Täytyykö?

6. Olkoon Ω yhtenäinen ja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmoninen ja ei vakio. Osoita, että u on avoin kuvaus, eli $u(U)$ on avoin joukko jokaiselle avoimelle $U \subset \Omega$. Päteekö tämä kompleksiarvoisille funktioille?

7. Olkoon Ω rajoitettu, $\partial\Omega$ yhtenäinen, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ jatkuva ja harmoninen Ω:ssa. Osoita, että $u(\Omega) \subset u(\partial\Omega)$. Päteekö tämä kompleksiarvoisille funktioille?

8. Olkoon Ω yhtenäinen ja $u : \Omega \to \mathbb{C}$ jatkuva. Todista, että jos jokaisella $x \in \Omega$ on olemassa jono $r_j > 0, r_j \to 0$, siten että

$$u(x) = \frac{1}{m_n(B(x,r_j))} \int_{B(x,r_j)} u \text{ kaikilla } j,$$

niin u on harmoninen.