Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Potentiaaliteoria
Harjoitus 3, ratkaisuehdotuksia
8.10.2012

1. Olkoon u harmoninen $\mathbb{R}^n$:ssa siten, että $u(x,0) = 0$ kaikille $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. Osoita, että $u(x,-y) = -u(x,y)$ kaikille $(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.
ratk. Määritellään uusi funktio $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$\tilde{u}(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & y > 0 \\ -u(x,-y) & y \leq 0 \end{cases}$$

$\tilde{u}$ on oletuksen $u(x,0) \equiv 0$ nojalla jatkuva. Lisäksi se on harmoninen joukossa $\mathbb{R}^n \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}^{n-1}\}$. Siten $\tilde{u}$:n harmonisuuden osoittamiseksi riittää näyttää, että sillä on keskiarvo-ominaisuus pisteissä $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}^{n-1}\}$. Mutta selvästi

$$\int_{S((x,0),r)} \tilde{u} = 0$$

kun $r > 0$ funktion $\tilde{u}$ määritelmän nojalla. Täten $\tilde{u}$ on harmoninen $\mathbb{R}^n$:ssä. Koska $u = \tilde{u}$ avoimessa joukossa, on oltava $u = \tilde{u}$ koko $\mathbb{R}^n$:ssä.

2. Osoita, että jos u on rajoitettu ja harmoninen joukossa

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\} \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq 1/2, x_2 = x_3 = 0\},$$

niin u voidaan jatkaa harmoniseksi funktioksi koko kuulaan $B(0,1)$.
ratk. Merkitään

$$I := \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq 1/2, x_2 = x_3 = 0\}.,$$

olkoon $\mu = \mathcal{H}^1_I$ ja määritellään

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mu(y)}{|x-y|}.$$

Tämä on harmoninen $\mathbb{R}^3 \setminus I$:ssa (h1t2). Olkoon a_n jono U:ssa siten, että $a_n \to x_0 \in I$. Jos $a_n = (x_n, y_n, z_n)$ ja $x_0 = (x,0,0)$, saadaan Fatoun lemman nojalla

$$\begin{aligned}\infty = f(x_0) &= \int_0^{1/2} \frac{dt}{|x-t|} = \int_0^{1/2} \lim_{n\to\infty} \frac{dt}{\sqrt{|x_n - t|^2 + y_n^2 + z_n^2}} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{|x_n - t|^2 + y_n^2 + z_n^2}} = \liminf_{n\to\infty} f(a_n).\end{aligned}$$

Siis $f(x)$ kasvaa rajatta, kun $x \to x_0 \in I$.

Olkoon nyt $1/2 < r < 1$ ja $\varepsilon > 0$. Asetetaan

$$v_\varepsilon = u - P[u|_{S(0,r)}] + \varepsilon(f - P[f|_{S(0,r)}])$$

alueessa $B(0,r) \setminus I$. Nyt $v_\varepsilon \equiv 0$ $S(0,r)$:ssä, ja $v_\varepsilon(x) \to \infty$ kun $x \in x_0 \in I$. Siten antamalla $\varepsilon \to 0$ saamme $u - P[u|_{S(0,r)}] \geq 0$ alueessa $B(0,r) \setminus I$. Korvaamalla ε:n $-\varepsilon$:lla saamme vastaavasti $u - P[u|_{S(0,r)}] \leq 0$ alueessa $B(0,r) \setminus I$. Siten u:lla on harmoninen jatko $P[u|_{S(0,r)}]$ myös I:n pisteisiin.

3. Todista, että jos $u_j : \Omega \to (0,\infty), j = 1,2\ldots$, ovat harmonisia funktioita siten, että $\lim_{j\to\infty} u_j(x) = u(x) \in \mathbb{R}$ kaikilla $x \in \Omega$, niin suppeneminen on tasaista Ω:n kompakteissa osajoukoissa ja u on harmoninen.
ratk. Olkoon $\emptyset \neq K \subset \Omega$ kompakti. Valitaan $x_0 \in K$ ja j_0 siten, että $u_j(x_0) < u(x_0)+1$ aina, kun $j > j_0$. Harnackin epäyhtälön nojalla on olemassa $C = C_K$ siten, että

$$\sup_K u_j \leq C \inf_K u_j \leq C(u(x_0)+1),$$

kun $j > j_0$. Jono u_j on siis tasaisesti rajoitettu kompakteilla joukoilla, joten perhe $N = \{u\} \cup \{u_j : j = 1,2,\ldots\}$ on normaali. Jonon u_j jokaisella osajonolla on siis (u:hun) lokaalisti tasaisesti suppeneva osajono. Tästä seuraa, että $u_j \to u$ lokaalisti tasaisesti. Rajafunktion u harmonisuus seuraa lokaalisti tasaisesta suppenemisesta.

4. Olkoon $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ Ω:n diskreetti osajoukko. Karakterisoi positiiviset harmoniset funktiot $\Omega \setminus A$:ssa.
ratk. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Osoitetaan että $\Omega \setminus A$:ssa harmoniset positiiviset funktiot ovat muotoa

$$u(x) = v(x) + \sum_j b_j|x - a_j|^{2-n},$$

missä v on harmoninen ja positiivinen Ω:ssa, ja $b_j \geq 0$.

Koska A on diskreetti Ω:ssa, jokaisella j löytyy $r_j > 0$, jolla $B_j = B(a_j, r_j) \subset \Omega$ ja $a_i \notin B_j$, kun $i \neq j$. Bocherin lauseen nojalla u voidaan kirjoittaa B_j:ssä muotoon

$$u(x) = v_j(x) + b_j|x - a_j|^{2-n}.$$

Asettamalla $v_j(x) = u(x) - b_j|x - a_j|^{2-n}$ kun $x \notin \overline{B_j}$, voidaan v_j laajentaa harmoniseksi alueeseen $(\Omega \setminus A) \cup \{a_j\}$. Olemme siis redusoineet ongelman vastavaksi ongelmaksi joukolle $A \setminus \{a_j\}$. Merkitsemällä $A_1 = A \setminus \{a_1\}$, ja induktiivisesti $A_{n+1} = A_n \setminus \{a_{n+1}\}$, saamme

$$u(x) = v_1(x) + b_1|x - a_1|^{2-n} = \cdots = v_n(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j|x - a_j|^{2-n},$$

missä v_n on positiivinen ja harmoninen $\Omega \setminus A_n$:ssä.

Jos joukko A on äärellinen, olemme todistaneet väitteen. Voi kuitenkin käydä niin, että joukkolla A on kasaantumispisteitä reunalla $\partial\Omega$. Silloin tarvitsemme pienen rajankäynti-argumentin.

Jono $f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j|x - a_j|^{2-n}$ on nouseva jono harmonisia funktioita, siten Harnackin periaatteen mukaan joko $f_n \to \infty$ jokaisessa pisteessä (itse asiassa lokaalisti tasaisesti), tai f_n suppenee lokaalisti tasaisesti kohti jotakin harmonista funktiota f (jonka on silloin oltava $\sum_j b_j|x - a_j|^{2-n}$). Toisaalta, koska $v_n \geq 0$ kaikilla n, saamme

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j|x - a_j|^{2-n} \leq u(x),$$

joten ensimmäinen vaihtoehto ei voi olla voimassa.

Nyt myös $v_n = u - f_n$ suppenee lokaalisti tasaisesti kohti rajafunktiota v. Haluamme todistaa, että v on harmoninen koko Ω:ssa. Tätä varten riittää todistaa, että se on harmoninen jokaisessa pisteessä a_j. Kaikilla $n > j$ funktio v_n on harmoninen $\Omega \setminus A_n$:ssä, erityisesti siis myös a_j:ssä. Koska $v_n \to v$ tasaisesti jossakin a_j:n ympäristössä, v on harmoninen a_j:ssa. Siten v on harmoninen koko Ω:ssa. Olemme siis kirjoittaneet alkuperäisen funktion u muotoon

$$u(x) = v(x) + f(x) = v(x) + \sum_j b_j|x - a_j|^{2-n},$$

kuten haluttiin osoittaa.

Jos $n = 2$ vastaus riippuu Ω:sta; esimerkiksi jos $\Omega = \mathbb{C}$, kysytyt funktiot ovat positiivisia vakioita. Mikäli taas $\Omega = B(0, 1)$, saadaan yllä olevaa vastaava tulos

$$u(x) = v(x) + \sum_j b_j \log 1/|\varphi_{a_j}(x)|, \ \varphi_a(x) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$$

5. Todista luentojen Lauseen 4.2 yksikäsitteisyys, kun $n \geq 3$: jos $u, v : R^n \setminus B(0,1) \to \mathbb{C}$ ovat jatkuvia, harmonisia $R^n \setminus \overline{B}(0,1)$:ssä, $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \lim_{|x|\to\infty} v(x) = 0$ ja $u(x) = v(x)$, kun $x \in S^{n-1}$, niin $u = v$.
ratk. Käytetään Axlerin kirjan korollaaria 1.10 (s.8) funktioon $w = Re(u-v)$. Oletusten nojalla

$$\limsup_{k\to\infty} w(a_k) = 0,$$

kun $a_k \to a \in S^{n-1}$, ja samoin

$$\limsup_{k\to\infty} w(a_k) = 0,$$

kun $|a_k| \to \infty$. Korollaarin 1.10 mukaan silloin $w \leq 0$ koko alueessa $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$. Korvaamalla w funktiolla $-w$ saadaan samoin $w \geq 0$ Ω:ssa. Siis $Re(u) = Re(v)$ alueessa $\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$. Sama päättely antaa vastaavan tuloksen imaginääriosille, joten väite on todistettu.

6. Olkoot $\zeta_0 \in S^{n-1}, r > 0$ ja $C = \{\zeta \in S^{n-1} : |\zeta - \zeta_0| \leq r\}$. Osoita, että on olemassa rajoitettu harmoninen funktio $\mathbb{R}^n \setminus C$:ssä, joka ei ole vakio.
ratk. Oletetaan aluksi $n > 2$. Olkoon $\mu = \mathcal{H}^{n-1}_C / \omega_{n-1}$. Silloin μ on äärellinen Borel-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä, joka on kannatettu joukossa C. Riittää osoitta, että sen potentiaali,

$$U_\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{2-n} d\mu(y), \; x \in \mathbb{R}^n \setminus C,$$

on rajoitettu, sillä U_μ on tunnetusti harmoninen $\mathbb{R}^n \setminus C$:ssä. Asetetaan

$$S_k = \{\zeta \in S^{n-1} : 2^k < |x - \zeta| \leq 2^{k+1}\}.$$

Erityisesti kun $k < 0$ pätee $\sigma(S_k) \leq c2^{(n-1)k}$ jollakin vakiolla c, joka riippuu vain n:stä. (Mikäli $dist(x, S^{n-1}) \geq 1$ pätee jopa $\sigma(S_k) = 0$ kun $k < 0$. Tarvitsemme kuitenkin vain aiemmin mainittua arviota.) Voidaan arvioida

$$\begin{aligned} U_\mu(x) &= \int_C |x-y|^{2-n} d\sigma(y) \leq \int_{S^{n-1}} |x-y|^{2-n} d\sigma(y) \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{S_k} |x-\zeta|^{2-n} d\sigma\zeta \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(n-2)} \sigma(S_k). \end{aligned}$$

Summaa puolestaan voidaan arvioida seuraavasti.

$$\begin{aligned} &\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(n-2)} \sigma(S_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(n-2)} \sigma(S^{n-1}) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(n-2)} \sigma(S_{-k}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(n-2)} \sum_{k=1}^{\infty} c2^{k(n-2)-k(n-1)} = \frac{1}{1-2^{2-n}} + c\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} =: C < \infty. \end{aligned}$$

Siis U_μ on rajoitettu *kaikilla* x (myös $x \in C$).

Tapauksessa $n = 2$ yllä esitetty todistus ei toimi, joten käytämme toista taktiikkaa.

Olkoon $f(\zeta) = \chi_C(\zeta)$, $\zeta \in S^1$. Asetetaan

$$u = \begin{cases} Pf(z) & |z| < 1 \\ f(z) & |z| = 1 \\ P_e f(z) & |z| > 1 \end{cases}$$

Selvästi u on rajoitettu kaikkialla ja harmoninen joukossa $\mathbb{C} \setminus S^1$. Haluamme vielä osoittaa, että u on harmoninen myös $S^1 \setminus C$:n pisteissä. Mutta Axlerin kirjan lauseen 4.15 mukaan näin on, sillä $\Omega = \mathbb{C} \setminus C$ on symmetrinen S^1:n suhteen, ja $u = 0$ joukossa $\Omega \cap S^1 = S^1 \setminus C$.

Huomautus Jälkimmäinen ratkaisu on huomattavasti lyhyempi, ja pätee myös arvoille $n \geq 3$. Ensimmäisessä ratkaisussa on kuitenkin se etu, että se yleistyy monimutkaisemmilla joukoille C, sillä se nojaa joukon C symmetrioiden sijasta sen mittateoreettisiin ominaisuuksiin.