Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Potentiaaliteoria, ratkaisuehdotuksia
Harjoitus 2
1.10.2012

1. Osoita, että jokainen radiaalinen harmoninen funktio $B(0,1)$:ssä on vakio. u on radiaalinen, jos se on muotoa $u(x) = g(|x|)$.
ratk. Oletetaan, että $u(x) = g(|x|)$ on harmoninen $B(0,1)$:ssä. Silloin keskiarvoperiaatteen mukaan

$$u(0) = \fint_{S^{n-1}(0,r)} u(x)d\sigma(x) = \fint_{S^{n-1}(0,r)} g(r)d\sigma = g(r)$$

mille tahansa $0 < r < 1$. Funktio g on täten vakio, siispä myös u:n on oltava vakio.

2. Todista edellisen avulla aikaisemmin todistettu yhtälö

$$\int_{\partial B(0,1)} P(x,\zeta)d\sigma\zeta = 1.$$

ratk. Osoitetaan, että

$$h(x) = \int_{\partial B(0,1)} P(x,\zeta)d\sigma\zeta$$

on radiaalinen. Kirjoitetaan $x = |x|e$, missä e on x:n suuntainen yksikkövektori. Mitta σ (ja $\partial B(0,1)$) on invariantti rotaatioiden suhteen, joten soveltamalla tätä ortogonaaliseen kuvaukseen T, jolle $T(e_n) = e$, saamme

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{\partial B(0,1)} \frac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n} d\sigma\zeta \\ &= \int_{\partial B(0,1)} \frac{1-|x|^2}{|x-T\zeta|^n} d\sigma\zeta = \int_{\partial B(0,1)} \frac{1-|x|^2}{||x|e_n-\zeta|^n} d\sigma\zeta = h(|x|e_1), \end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen. Siten $h(x) = h(0) = \int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{|\zeta|^2} d\sigma\zeta = 1.$ kaikilla $x \in B(0,1)$.

3. Johda kaava kuulan $B(a,r)$ Poissonin ytimelle.
ratk. Merkitään etsittyä Poissonin ydintä $P_{a,r}$:llä. Se on siis se yksikäsitteinen funktio $B(a,r) \times S(a,r) \to \mathbb{R}$, jolle jokaisella $B(a,r)$:ssä harmonisella $u \in C(\overline{B}(a,r))$ pätee

$$u(y) = \int_{S(a,r)} P_{a,r}(y,\xi)d\sigma\xi.^{1}$$

[1] Tässä $\sigma = \mathcal{H}^{n-1}/\omega_{n-1}$

Määritellään $\overline{u}(x) = u(a + rx)$, $x \in B(0,1)$. Tällöin saadaan $B(0,1)$:ssä harmoninen funktio $\overline{u} \in C(\overline{B}(0,1))$, joten

$$\overline{u}(x) = \int_{S(0,1)} P(x,\zeta) d\sigma\zeta.$$

Muuttujanvaihdolla $\xi = a + r\zeta$ (jolloin $d\sigma\zeta = r^{1-n} d\sigma\xi$) saadaan

$$\overline{u}(x) = r^{1-n} \int_{S(a,r)} P(x, \frac{\xi - a}{r}) d\sigma\xi.$$

Jos $y \in B(a,r)$, saadaan

$$u(y) = \overline{u}(\frac{y-a}{r}) = r^{1-n} \int_{S(a,r)} P(\frac{y-a}{r}, \frac{\xi - a}{r}) d\sigma\xi.$$

Tämä pätee kaikille funktiolle $u \in C(\overline{B}(a,r))$ jotka ovat harmonisia kuulassa $B(a,r)$. Siten

$$P_{a,r}(y,\xi) = r^{1-n} P(\frac{y-a}{r}, \frac{\xi-a}{r}) = \frac{r^2 - |y-a|^2}{r|y-\xi|^n}.$$

Huom. Kannattaa huomata, että riippuen mitan σ normalisoinnista, eri lähteissä saattaa esiintyä erilaisia kertoimia Poissonin ytimen lausekkeessa.

4. Pallon S^{n-1} äärellisen Borelin mitan μ Poissonin integraali on

$$P(\mu)(x) = \int_{S^{n-1}} P(x,\zeta) d\mu\zeta, \ x \in B(0,1).$$

Osoita, että $P(\mu)$ on harmoninen, mutta ei välttämättä rajoitettu. Osoita että se on rajoitettu, jos μ on muotoa $f\sigma$ missä f on ei-negatiivinen rajoitettu Borelin funktio.
ratk. Näytetään, että $P\mu$:lla on keskiarvo-ominaisuus. Olkoon $x \in B(0,1)$ ja $r > 0$ siten, että $S^{n-1}(x,r) \subset B(0,1)$. Silloin

$$\begin{aligned}
&\int_{S^{n-1}} P\mu(x + r\zeta) d\sigma\zeta = \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} P(x + r\zeta, \xi) d\mu\xi d\sigma\zeta \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} P(x + r\zeta, \xi) d\sigma\zeta d\mu\xi = \int_{S^{n-1}} P(x,\xi) d\mu\xi = P\mu(x).
\end{aligned}$$

Siten $P\mu$ on harmoninen $B(0,1)$:ssä.

Nähdäksemme, että $P\mu$ ei välttämättä ole rajoitettu, olkoon $\mu = \delta_e$ jollekin $e \in S^{n-1}$. Silloin $P\mu(x) = P(x,e)$ ja sille pätee

$$\lim_{x \to e} P\mu(x) = \infty.$$

Todistetaan vielä, että jos $d\mu = f d\sigma$, missä f on rajoitettu Borel funktio S^{n-1}:ssä, niin $P\mu$ *on* rajoitettu. Tämä nähdään suoralla laskulla:

$$|Pf(x)| \leq \int_{Sn-1} P(x,\zeta)|f(\zeta)| d\sigma\zeta \leq \|f\|_\infty$$

kaikilla $x \in B(0,1)$.

5. Anna esimerkki rajoitetusta harmonisesta funktiosta $B(0,1)$:ssä, joka ei ole tasaisesti jatkuva.
ratk. Aloitetaan huomaamalla, että Möbius-kuvaus $z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$ kuvaa kompleksitason yksikkökiekon $\mathbb{D}$ vasemmanpuoleiselle puolitasolle $\{z = x + iy : x < 0\}$. Siten jokaiksella $z \in \mathbb{D}$ on

$$u(z) := \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \in \mathbb{D},$$

toisin sanoen u on rajoitettu. (Se on harmoninen, koska se on peräti analyyttinen.) Kuitenkaan u:ta ei voida jatkaa jatkuvaksi kuvaukseksi suljettuun kiekkoon $\overline{\mathbb{D}}$, sillä raja-arvoa $u(z)$, kun $\mathbb{D} \ni z \to 1$, ei ole olemassa. Näinollen u ei voi olla tasaisesti jatkuva.

Jos halutaan reaaliarvoinen esimerkki, riittää tarkastella u:n reaali- tai imaginääriosia.

6. Olkoon u harmoninen $B(0,1) \setminus \{0\}$:ssa siten, että $|x|^{n-2}u(x) \to 0$, kun $x \to 0$. Osoita, että 0 on u:n poistuva singulariteetti.
ratk. Itse asiassa Axlerin kirjassa esitetty todistus lauseelle 2.3 menee läpi näilläkin oletuksilla.

Voidaan olettaa, että u on reaaliarvoinen. Koska $|x|^{n-2}u(x) \to 0$ kun $x \to 0$, raja-arvo $u(x) + \varepsilon|x|^{2-n} \to \infty$, kun $x \to 0$ on voimassa jokaisella $\varepsilon > 0$. Määritellään nyt

$$u_\varepsilon(x) = u(x) - P[u|_{S(0,1/2)}](x) + \varepsilon(|x|^{2-n} - 2^{n-2}), \quad x \in B(0,1/2) \setminus \{0\}.$$

Näemme, että $u_\varepsilon \equiv 0$ $S(0,1/2)$:ssä, ja $u_\varepsilon(x) \to \infty$ kun $x \to 0$. Siis $u_\varepsilon \geq 0$ $B(0,1/2) \setminus \{0\}$:ssa. Antamalla $\varepsilon \to 0$, saamme $u - P[u|_{S(0,1/2)}] \geq 0$ joukossa $B(0,1/2) \setminus \{0\}$. Vastaava päättely apufunktion

$$v_\varepsilon = u(x) - P[u|_{S(0,1/2)}](x) - \varepsilon(|x|^{2-n} - 2^{n-2})$$

avulla antaa $u - P[u|_{S(0,1/2)}] \leq 0$ $B(0,1/2) \setminus \{0\}$:ssa. Siten u:lla on harmoninen jatko origoon.

7. Osoita, että jos u on rajoitettu harmoninen funktio $B(0,1)$:ssä, niin

$$\sup_{x \in B(0,1)} (1 - |x|)|\nabla u(x)| < \infty.$$

Todista, että harmonisten funktioiden $u : B(0,1) \to \mathbb{C}$ joukko, joille

$$\|u\|_B := |u(0)| + \sup_{x \in B(0,1)} (1 - |x|)|\nabla u(x)| < \infty$$

on Banachin avaruus, ns. Blochin avaruus, normilla $\| \cdot \|_B$.
ratk. Jokaisella $x \in B(0,1)$ funktio u on harmoninen $B(x, 1 - |x|)$:ssa. Siten suoraan Cauchyn estimaatista saamme $|\partial_j u(x)| \leq C\|u\|_\infty/(1 - |x|)$, joten

$$(1 - |x|)|\nabla u(x)| \leq C\|u\|_\infty$$

kaikilla $x \in B(0,1)$.

Merkitkäämme B:llä niiden harmonisten funktioiden $u \colon B(0,1) \to \mathbb{C}$ joille Blochin normi $\|u\|_B < \infty$. Osoitetaan, että B on Banachin avaruus.

Olkoon u_n Cauchy-jono B:ssä, ja olkoon $K \subset B(0,1)$ kompakti joukko. Valitaan $0 < r < 1$ siten, että $K \subset B(0,r)$. Silloin kaikilla $x \in K$

$$\begin{aligned}
&|u_n(x) - u_m(x)| \leq |u_n(0) - u_m(0)| + |u_n(x) - u_m(x) - u_n(0) + u_m(0)| \\
&\leq \|\nabla u_n - u_m\|_{B(0,r)}|x - 0| \leq |u_n(0) - u_m(0)| + \frac{\|u_n - u_m\|_B}{1 - r} r \\
&\leq \frac{C\|u_n - u_m\|_B}{1 - r}.
\end{aligned}$$

Toisin sanoen jokaisella kompaktilla joukolla $K \subset B(0,1)$, (u_n) on Cauchy-jono normin $\| \cdot \|_K$ suhteen. Täten on olemassa harmoninen $u \colon B(0,1) \to \mathbb{C}$ siten, että $u_n \to u$ lokaalisti tasaisesti.

Näytetään vielä, että $\|u_n - u\|_B \to 0$. Koska kaikilla $j = 1, \ldots, n$ $(1 - |x|)\partial_j u_n(x)$ on Cauchy-jono sup-normissa, on olemassa funktio h_j siten, että $(1 - |x|)\partial_j u_n(x) \to (1 - |x|)h_j(x)$ tasaisesti, kun $n \to \infty$ (jolloin erityisesti $\partial_j u_n \to h_j$ pisteittäin). Toisaalta, koska $u_n \to u$ lokaalisti tasaisesti, pätee $\partial_j u_n \to \partial_j u$ lokaalisti tasaisesti. Siten on oltava $h_j = \partial_j u$. Kaiken kaikkiaan siis

$$|u_n(0) - u(0)| + \|(1 - |x|)|\nabla(u_n - u)(x)|\| \to 0$$

kun $n \to \infty$.