20 Isomorfismi

Kuvaus on *bijektiivinen* eli *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio. Tällöin kullekin maalijoukon alkiolle kuvautuu täsmälleen yksi lähtöjoukon alkio.

Määritelmä 20.1. *Isomorfismi* on bijektiivinen lineaarikuvaus.

Jos vektoriavaruuksien V ja U välillä on isomorfismi, sanotaan, että V ja U ovat *isomorfiset*. Tällöin merkitään $V \cong U$. Isomorfiset vektoriavaruudet ovat ominaisuuksiltaan samankaltaiset.

Esimerkki 20.2. Osoitetaan, että kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $L(a,b) = ax + b$ on isomorfismi. Esimerkin 18.6 perusteella kuvauksen tiedetään olevan lineaarikuvaus. Lisäksi on osoitettava, että kuvaus on bijektio eli että kuvaus on sekä injektio että surjektio. Kuvauksen ydin $\operatorname{Ker} L$ on esimerkin 19.4 mukaan $\{(0,0)\}$, joten kuvaus on injektio. Kuva $\operatorname{Im} L$ puolestaan on esimerkin 19.10 nojalla koko maalijoukko $\mathcal{P}_1$. Siten L on surjektio. Näin ollen L on bijektio ja edelleen isomorfismi.

Koska L on isomorfismi, vektorivaruudet $\mathbb{R}^2$ ja $\mathcal{P}_1$ ovat isomorfisia. Huomataan, että avaruudet muistuttavat toisiaan. Sekä alkiossa (a,b) että alkiossa $ax+b$ näkyvät reaaliluvut a ja b. Kaikki oleellinen tieto alkiosta sisältyy näihin reaalilukuihin. Lisäksi nämä reaaliluvut käyttäytyvät samalla tavoin yhteenlaskussa ja skalaarikertolaskussa. Tätä on havainnollistettu taulukossa 2.1.

Vektoriavaruus	summa
$\mathbb{R}^2$	$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
$\mathcal{P}_1$	$(ax+b) + (cx+d) = (a+c)x + (b+d)$

Vektoriavaruus	skalaarimonikerta
$\mathbb{R}^2$	$r(a,b) = (ra, rb)$
$\mathcal{P}_1$	$r(ax+b) = rax + rb$

Taulukko 2.1: Vektorien yhteenlasku ja skalaarikertolasku avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathcal{P}_1$.

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on kuvaus. Jos on olemassa kuvaus $T\colon U \to V$, jolle pätee

$$T \circ L = \mathrm{id}_V \quad \text{ja} \quad L \circ T = \mathrm{id}_U,$$

sanotaan, että kuvaus T on kuvauksen L *käänteiskuvaus*[5].

Tässä merkintä id_V tarkoittaa avaruuden V *identtistä kuvausta*: $\mathrm{id}_V : V \to V$, jolla $\bar{v} \mapsto \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$. Vastaavasti id_U tarkoittaa avaruuden U identtistä kuvausta. Käänteiskuvauksen ehto voidaan siis kirjoittaa myös muodossa

$$T(L(\bar{v})) = \bar{v} \quad \text{kaikilla } \bar{v} \in V \qquad \text{ja} \qquad L(T(\bar{u})) = \bar{u} \quad \text{kaikilla } \bar{u} \in V.$$

Kuvauksen L käänteiskuvausta merkitään L^{-1}. Kaikilla kuvauksilla ei ole käänteiskuvausta.

[5]Käänteiskuvauksista voidaan puhua muidenkin kuvausten kuin lineaarikuvausten yhteydessä.

Esimerkki 20.3. Osoitetaan, että kuvauksen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $L(a,b) = ax + b$ käänteiskuvaus on kuvaus $T\colon \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2$, $T(ax+b) = (a,b)$. Olkoon $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Nyt

$$(T \circ L)(a,b) = T(L(a,b)) = T(a+bx) = (a,b),$$

joten $T \circ L = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Toisaalta

$$(L \circ T)(ax+b) = L(T(ax+b)) = L(a,b) = ax+b,$$

joten $L \circ T = \mathrm{id}_{\mathcal{P}_1}$. Siten T on kuvauksen L käänteiskuvaus eli $T = L^{-1}$.

Voidaan osoittaa, että kuvauksella L on käänteiskuvaus, jos ja vain jos L on bijektio. Tästä saadaan seuraava tulos:

Lause 20.4. *Lineaarikuvaus on isomorfismi, jos ja vain jos sillä on käänteiskuvaus.*

Lause 20.5. *Oletetaan, että V, U ja W ovat vektoriavaruuksia. Tällöin*

a) $V \cong V$

b) jos $V \cong U$*, niin* $U \cong V$

c) jos $V \cong U$ *ja* $U \cong W$*, niin* $V \cong W$.

Todistus.

a) Ei ole vaikea osoittaa, että identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon V \to V$, $\mathrm{id}(\bar{v}) = \bar{v}$ on bijektiivinen lineaarikuvaus. Siten se on isomorfismi vektoriavaruudelta V itselleen.

b) Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on isomorfismi. Koska L on bijektio, on olemassa käänteiskuvaus $L^{-1}\colon U \to V$. Osoitetaan, että L^{-1} on isomorfismi. Ensinnäkin tiedetään, että bijektion käänteiskuvaus on myöskin bijektio, joten L^{-1} on bijektio. Tarkistetaan vielä lineaarikuvauksen ehdot.

   Oletetaan, että $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U$ ja $c \in \mathbb{R}$. Koska L on bijektio ja siten surjektiivinen, on olemassa vektorit $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$, joille pätee $L(\bar{v}_1) = \bar{u}_1$ ja $L(\bar{v}_2) = \bar{u}_2$. Huomaa, että tällöin $\bar{v}_1 = L^{-1}(\bar{u}_1)$ ja $\bar{v}_2 = L^{-1}(\bar{u}_2)$. Nyt

$$\begin{aligned} L^{-1}(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) &= L^{-1}(L(\bar{v}_1) + L(\bar{v}_2)) = L^{-1}(L(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)) \\ &= \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = L^{-1}(\bar{u}_1) + L^{-1}(\bar{u}_2) \end{aligned}$$

   ja

$$L^{-1}(c\bar{u}_1) = L^{-1}(cL(\bar{v}_1)) = L^{-1}(L(c\bar{v}_1)) = c\bar{v}_1 = cL^{-1}(\bar{u}_1).$$

   Siten L^{-1} on lineaarikuvaus. Näin on osoitettu, että L^{-1} on isomorfismi.

c) Todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

21 Kanta ja lineaarikuvaukset

Esimerkissä 18.7 näytettiin, miten kantavektorien arvoista voidaan johtaa kaikkien muidenkin vektorien arvot, jos kuvauksen tiedetään olevan lineaarikuvaus. Vieläkin vahvempi tulos pitää paikkansa. Lineaarikuvaus voidaan jopa *määäritellä* antamalla pelkkien kantavektorien arvot.

Lause 21.1. *Olkoot V ja U vektoriavaruuksia. Oletetaan, että $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n)$ on avaruuden V kanta ja $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n \in U$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi lineaarikuvaus $L\colon V \to U$, jolle pätee $L(\bar{v}_i) = \bar{u}_i$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Todistus. Jos $\bar{w} \in V$, on olemassa yksikäsitteiset reaaliluvut $w_1 \ldots, w_n$, joille pätee $\bar{w} = w_1\bar{v}_1 + w_2\bar{v}_2 + \cdots + w_n\bar{v}_n$. Määritellään kuvaus

$$L\colon V \to U, \quad L(\bar{w}) = w_1\bar{u}_1 + w_2\bar{u}_2 + \cdots + w_n\bar{u}_n,$$

missä luvut $w_1 \ldots, w_n$ ovat kuten yllä. (Kyseessä ovat siis vektorin $\bar{w}$ koordinaatit kannan $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n)$ suhteen.)

Osoitetaan, että L on etsitty kuvaus. Jos $i \in \{1, \ldots, n\}$, niin

$$\bar{v}_i = 0\bar{v}_1 + \cdots + 0\bar{v}_{i-1} + 1\bar{v}_i + 0\bar{v}_{i+1} + 0\bar{v}_n.$$

Siis

$$L(\bar{v}_i) = 0\bar{u}_1 + \cdots + 0\bar{u}_{i-1} + 1\bar{u}_i + 0\bar{u}_{i+1} + 0\bar{u}_n = \bar{u}_i,$$

joten kantavektorit kuvautuvat halutulla tavalla.

Osoitetaan vielä, että L on lineaarikuvaus. Oletetaan, että $\bar{x}, \bar{y} \in V$. Nyt

$$\bar{x} = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_n\bar{v}_n \quad \text{ja} \quad \bar{y} = y_1\bar{v}_1 + y_2\bar{v}_2 + \cdots + y_n\bar{v}_n$$

joillakin $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Nähdään, että

$$\begin{aligned}
L(\bar{x} + \bar{y}) &= L\big((x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_n\bar{v}_n) + (y_1\bar{v}_1 + y_2\bar{v}_2 + \cdots + y_n\bar{v}_n)\big) \\
&= L\big((x_1 + y_1)\bar{v}_1 + (x_2 + y_2)\bar{v}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\bar{v}_n\big) \\
&= (x_1 + y_1)\bar{u}_1 + (x_2 + y_2)\bar{u}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\bar{u}_n \\
&= (x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + \cdots + x_n\bar{u}_n) + (y_1\bar{u}_1 + y_2\bar{u}_2 + \cdots + y_n\bar{u}_n) \\
&= L(x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_n\bar{v}_n) + L(y_1\bar{v}_1 + y_2\bar{v}_2 + \cdots + y_n\bar{v}_n) \\
&= L(\bar{x}) + L(\bar{y}).
\end{aligned}$$

Oletetaan vielä, että $c \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned}
L(c\bar{x}) &= L\big(c(x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_n\bar{v}_n)\big) \\
&= L(cx_1\bar{v}_1 + cx_2\bar{v}_2 + \cdots + cx_n\bar{v}_n) \\
&= cx_1\bar{u}_1 + cx_2\bar{u}_2 + \cdots + cx_n\bar{u}_n \\
&= c(x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + \cdots + x_n\bar{u}_n) \\
&= cL(x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_n\bar{v}_n) \\
&= cL(\bar{x}).
\end{aligned}$$

Siten L on lineaarikuaus. On siis olemassa vähintään yksi kuvaus, joka täyttää annetut ehdot.

Osoitetaan sitten, että lauseen vaatimukset täyttäviä lineaarikuvauksia on enintään yksi. Oletetaan, että $L\colon V \to W$ ja $T\colon V \to W$ ovat molemmat lineaarikuvauksia, joille pätee

$$\begin{aligned}
&L(\bar{v}_1) = \bar{w}_1, L(\bar{v}_2) = \bar{w}_2, \ldots, L(\bar{v}_n) = \bar{w}_n \quad \text{ja} \\
&T(\bar{v}_1) = \bar{w}_1, T(\bar{v}_2) = \bar{w}_2, \ldots, T(\bar{v}_n) = \bar{w}_n.
\end{aligned}$$

Osoitetaan, että kuvaukset L ja T ovat samat.

Oletetaan, että $\bar{v} \in V$. Tällöin $\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n$ joillakin $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, sillä $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ on avaruuden V kanta. Kuvausten L ja T lineaarisuutta käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}
L(\bar{v}) &= L(a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n) = a_1L(\bar{v}_1) + \cdots + a_nL(\bar{v}_n) \\
&= a_1\bar{w}_1 + \cdots + a_n\bar{w}_n = a_1T(\bar{v}_1) + \cdots + a_nT(\bar{v}_n) \\
&= T(a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n) = T(\bar{v}).
\end{aligned}$$

Kuvauksilla $L\colon V \to W$ ja $T\colon V \to W$ on samat arvot, joten ne ovat sama kuvaus.

Siten lauseen ehdot täyttäviä lineaarikuvauksia on täsmälleen yksi. □

Nyt voidaan määritellä vaikkapa lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ asettamalla

$$\begin{aligned}
&L(\bar{e}_1) = (1, 5, -2),\ L(\bar{e}_2) = (0, 0, 0),\ L(\bar{e}_3) = (-1, 2, 6), \\
&L(\bar{e}_4) = (7, 4, 4),\ L(\bar{e}_5) = (0, 1, 0).
\end{aligned}$$

Lauseen 21.1 perusteella on olemassa täsmälleen yksi lineaarikuvaus, joka täyttää nämä viisi ehtoa. Niiden antaminen riittää siis määrittelemään kuvauksen L. Kuvauksen muut arvot voidaan laskea samaan tapaan kuin esimerkissä 18.7.

Äärellisulotteisen vektoriavaruuden tapauksessa lineaarikuvauksen ytimen ja kuvan dimensiot riippuvat toisistaan.

Lause 21.2 (Dimensiolause)**.** *Olkoot V ja U vektoriavaruuksia. Oletetaan, että V on äärellisulotteinen. Olkoon $L\colon V \to U$ lineaarikuvaus. Tällöin*

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{Ker} L) + \dim(\operatorname{Im} L).$$

Todistus. Olkoon $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ aliavaruuden $\operatorname{Ker} L$ kanta. Koska jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, se voidaan lauseen 17.12 nojalla täydentää vektoriavaruuden V kannaksi $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{u}_{k+1}, \ldots \bar{u}_n)$. Nyt siis $\dim(\operatorname{Ker} L) = k$ ja $\dim(V) = n$. Osoitetaan, että $(L(\bar{u}_{k+1}), \ldots L(\bar{u}_n))$ on aliavaruuden $\operatorname{Im} L$ kanta, jolloin $\dim(\operatorname{Im} L) = n - k$. Tämä todistaa väitteen.

Osoitetaan ensin, että $(L(\bar{u}_{k+1}), \ldots, L(\bar{u}_n))$ virittää aliavaruuden $\operatorname{Im} L$. Oletetaan, että $\bar{w} \in \operatorname{Im} L$. Koska kuvaus L on bijektio, on olemassa $\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{w} = L(\bar{v})$. Toisaalta tiedetään, että $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{u}_{k+1}, \ldots \bar{u}_n)$ on avaruuden V kanta, joten

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k + a_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \cdots + a_n\bar{u}_n$$

joillakin $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned}\bar{w} = L(\bar{v}) &= L(a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k + a_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \cdots + a_n\bar{u}_n) \\ &= a_1L(\bar{v}_1) + \cdots + a_kL(\bar{v}_k) + a_{k+1}L(\bar{u}_{k+1}) + \cdots + a_nL(\bar{u}_n) \\ &= \bar{0} + \cdots + \bar{0} + a_{k+1}L(\bar{u}_{k+1}) + \cdots + a_nL(\bar{u}_n),\end{aligned}$$

sillä $L(\bar{v}_1), \dots, L(\bar{v}_k) \in \operatorname{Ker} L$. Siten jokainen avaruuden U alkio voidaan kirjoittaa vektoreiden $L(\bar{u}_{k+1}), \dots, L(\bar{u}_n)$ lineaarikombinaationa eli

$$U = \operatorname{span}(L(\bar{u}_{k+1}), \dots L(\bar{u}_n)).$$

Osoitetaan sitten, että jono $(L(\bar{u}_{k+1}), \dots L(\bar{u}_n))$ on vapaa. Oletetaan, että

$$c_{k+1}L(\bar{u}_{k+1}) + \cdots + c_nL(\bar{u}_n) = \bar{0}$$

joillakin $c_{k+1}, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Nyt

$$L(c_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \cdots + c_n\bar{u}_n) = \bar{0},$$

joten $c_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \cdots + c_n\bar{u}_n \in \operatorname{Ker} L$. Näin ollen vektori $c_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \cdots + c_n\bar{u}_n$ voidaan kirjoittaa aliavaruuden $\operatorname{Ker} L$ kannan alkioiden lineaarikombinaationa. On siis olemassa luvut $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$c_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \cdots + c_n\bar{u}_n = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k.$$

Tästä saadaan yhtälö

$$-b_1\bar{v}_1 - \cdots - b_k\bar{v}_k + c_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \cdots + c_n\bar{u}_n = \bar{0}.$$

Jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{u}_{k+1}, \dots \bar{u}_n)$ on kuitenkin vektoriavaruuden V kanta, joten se on vapaa. Kaikkien lineaarikombinaation kertoimien pitää siis olla nollia:

$$b_1 = 0, \dots, b_k = 0, c_{k+1} = 0, \dots, c_n = 0.$$

Näin ollen tiedetään, että $c_{k+1} = 0, \dots, c_n = 0$, mistä seuraa, että alunperin tutkittu jono $(L(\bar{u}_{k+1}), \dots L(\bar{u}_n))$ on vapaa. Siten $(L(\bar{u}_{k+1}), \dots L(\bar{u}_n))$ on aliavaruuden $\operatorname{Im} L$ kanta.

Nyt $\dim(\operatorname{Im} L) = n - k$, $\dim(\operatorname{Ker} L) = k$ ja $\dim V = n$. Tästä seuraa, että $\dim(V) = \dim(\operatorname{Ker} L) + \dim(\operatorname{Im} L)$, joten väite on todistettu. □

Esimerkki 21.3. Tarkastellaan esimerkin 18.11 projektiokuvausta $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Esimerkissä 19.2 osoitettiin, että $\ker P = \operatorname{span}((1, 0))$, ja esimerkissä 19.9 näytettiin, että $\operatorname{Im} P = \operatorname{span}((1, 0))$. Nyt nähdään, että

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = 1 + 1 = \dim(\ker P) + \dim(\operatorname{Im} P)$$

aivan kuten Dimensiolauseen mukaan kuuluukin olla.

Jos lähtö- ja maaliavaruuden dimensiot ovat samat (ja äärelliset), ovat kaikki injektiot surjektioita ja surjektiot injektioita.

Lause 21.4. *Oletetaan, että V ja U ovat äärellisulotteisia vektoriavaruuksia ja* $\dim(V) = \dim(U)$. *Olkoon $L\colon V \to U$ lineaarikuvaus. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*

a) L on injektio

b) L on surjektio.

Huomaa, että lauseessa oletetaan, että lineaarikuvauksen lähtö- ja maaliavaruudella on sama dimensio. Jos tämä ehto ei ole voimassa, ei lauseen tuloskaan välttämättä päde.

Todistus. On osoitettava, että väite a) pätee, jos ja vain jos väite b) pätee. Perustana on Dimensiolause 21.2, jonka mukaan $\dim(V) = \dim(\operatorname{Ker} L) + \dim(\operatorname{Im} L)$.

"a) $\Rightarrow$ b)": Oletetaan, että L on injektio. Nyt lauseen 19.6 nojalla $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$, joten $\dim(\operatorname{Ker} L) = 0$. Tästä seuraa, että

$$\dim(\operatorname{Im} L) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Ker} L) = \dim(V) = \dim(U),$$

koska oletimme, että avaruuksien V ja U dimensiot ovat samat. Nyt tiedetään, että kuva $\operatorname{Im} L$ on vektoriavaruuden U aliavaruus, jolla on sama dimensio kuin avaruudella U. Lauseen 17.15 perusteella $\operatorname{Im} L = U$. Siten L on surjektio.

"b) $\Rightarrow$ c)": Oletetaan sitten, että L on surjektio. Nyt $\operatorname{Im} L = U$, joten pätee $\dim(\operatorname{Im} L) = \dim(U) = \dim(V)$. Tästä seuraa, että

$$\dim(\operatorname{Ker} L) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Im} L) = 0.$$

Siten $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$, ja L on injektio. □

Jos äärellisulotteiset vektoriavaruudet ovat isomorfiset, niiden dimensiot ovat samat. Myös käänteinen väite pätee. Jos vektoriavaruuksien dimensiot ovat samat, ne ovat isomorfiset. Äärellisulotteisen vektoriavaruuden dimensio riittää siis kertomaan vektoriavaruudesta kaiken oleellisen.

Lause 21.5. *Oletetaan, että V ja W ovat äärellisulotteisia vektoriavaruuksia. Vektoriavaruudet V ja W ovat isomorfiset, jos ja vain jos* $\dim(V) = \dim(W)$.

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että V ja W ovat isomorfiset. Tällöin on olemassa bijektiivinen lineaarikuvaus $L\colon V \to W$. Koska L on injektio, niin $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$. Dimensiolauseen 21.2 nojalla pätee

$$\dim(\operatorname{Im} L) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Ker} L) = \dim(V) - 0 = \dim(V).$$

Toisaalta L on myös surjektio, joten $\operatorname{Im} L = W$. Siis

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{Im} L) = \dim(W).$$

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että $\dim(V) = \dim(W) = n$. Vektoriavaruuksien välinen isomorfismi saadaan kuvaamalla avaruuden V kantavektorit avaruuden W kantavektoreille. Olkoon siis $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ vektoriavaruuden V kanta ja $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n)$ vektoriavaruuden W kanta. Olkoon $L\colon V \to W$ se lineaarikuvaus, jolle pätee

$$L(\bar{v}_1) = \bar{w}_1, L(\bar{v}_2) = \bar{w}_2, \ldots, L(\bar{v}_n) = \bar{w}_n.$$

Lauseen 21.1 mukaan tällaisia lineaarikuvauksia on täsmälleen yksi. Osoitetaan, että L on bijektio.

Näytetään ensin, että L on injektio osoittamalla, että $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$. Oletetaan, että $\bar{v} \in \operatorname{Ker} L$. Tällöin $L(\bar{v}) = \bar{0}$. Kirjoitetaan $\bar{v}$ kantavektorien lineaarikombinaationa: $\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n$ joillakin $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}\bar{0} &= L(\bar{v}) = L(a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n) = a_1L(\bar{v}_1) + \cdots + a_nL(\bar{v}_n) \\ &= a_1\bar{w}_1 + \cdots + a_n\bar{w}_n.\end{aligned}$$

Jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n)$ on kanta ja siten vapaa, joten tästä yhtälöstä seuraa, että

$$a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots, a_n = 0.$$

Siis

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n = 0\bar{v}_1 + \cdots + 0\bar{v}_n = \bar{0}.$$

Näin on osoitettu, että ytimessä ei ole muita vektoreita kuin nollavektori, eli $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$. Siis L on injektio.

Osoitetaan sitten surjektiivisuus. Oletuksen mukaan $\dim(V) = \dim(W)$. Koska lineaarikuvaus $L\colon V \to W$ on injektio, se on lauseen 21.4 mukaan myös surjektio. Siis L on bijektiivinen lineaarikuvaus eli isomorfismi. Näin ollen $V \cong W$. □

21.1 Lineaarikuvauksen matriisi

Tässä luvussa osoitamme, että jokainen lineaarikuvaus avaruudelta $\mathbb{R}^m$ avaruudelle $\mathbb{R}^n$ on jonkin matriisin määräämä lineaarikuvaus. Tutkitaan kuitenkin sitä ennen, miten matriisien määräämät lineaarikuvaukset käyttäytyvät.

Esimerkki 21.6. Tarkastellaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

määräämää lineaarikuvausta $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L_A(\bar{x}) = A\bar{x}$. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorin (x_1, x_2, x_3) kuva tässä kuvauksessa on

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 \\ 0x_1 - 1x_2 - 3x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1x_1 \\ 0x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ -1x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0x_3 \\ -3x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Vektorin (x_1, x_2, x_3) kuva kuvauksessa L_A on siis matriisin A sarakkeiden lineaarikombinaatio, jossa kertoimina ovat vektorin komponentit.

Nähdään, että kantavektorin $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$ kuva on

$$1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Samalla tavalla kantavektorin $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$ kuvaksi saadaan $(2, -1)$ ja kantavektorin $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ kuvaksi $(0, -3)$. Luonnollisen kannan vektorien kuvat ovat siis matriisin A sarakkeet.

Lauseessa 18.8 osoitettiin, että matriisista saadaan aina lineaarikuvaus. Nyt osoitamme, että jokainen lineaarikuvaus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on matriisin määräämä. Lineaarikuvaukset $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $m \times n$-matriisit siis vastaavat toisiaan.

Lause 21.7. *Oletetaan, että $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi matriisi $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, jolla $T(\bar{v}) = A\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$.*

Todistus. Aloitetaan tutkimalla, mitä tapahtuu, kun matriisilla kerrotaan vektoria. Samaan tapaan kuin esimerkissä 21.6 nähdään, että

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_1a_{11} \\ v_1a_{21} \\ \vdots \\ v_1a_{m1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_2a_{12} \\ v_2a_{22} \\ \vdots \\ v_2a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} v_na_{1n} \\ v_na_{2n} \\ \vdots \\ v_na_{mn} \end{bmatrix} \\
&= v_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + v_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Tulo on siis matriisin sarakkeiden lineaarikombinaatio, jossa kertoimina ovat vektorin komponentit.

Muodostetaan etsitty matriisi A seuraavasti: Katsotaan, miten avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollisen kannan $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ vektorit kuvautuvat lineaarikuvauksessa T eli määritetään $T(\bar{e}_1)$, $T(\bar{e}_2), \ldots, T(\bar{e}_n)$. Asetetaan vektorit $T(\bar{e}_1)$, $T(\bar{e}_2), \ldots, T(\bar{e}_n)$ matriisin A sarakkeiksi tässä järjestyksessä. Voidaan merkitä lyhyesti

$$A = \begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & T(\bar{e}_2) & \ldots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}.$$

Huomaa, että matriisin jokaisessa sarakkeessa on m alkiota ja sarakkeita on n kappaletta, joten A todella on $m \times n$-matriisi.

Osoitetaan, että matriisin A määräämä lineaarikuvaus $L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on sama kuvaus kuin T. Koska kantavektorien kuvavektorit määräävät lineaarikuvauksen (lause 21.1), riittää osoittaa, että kantavektorit $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ kuvautuvat samalla tavalla kuvauksissa L_A ja T.

Määritetään luonnollisen kannan vektorien kuvat samaan tapaan kuin esimerkissä 21.6. Edellä osoitettiin, että vektorin kuva lineaarikuvauksessa L_A on matriisin A sarakkeiden lineaarikombinaatio, jossa kertoimina ovat vektorin komponentit. Tästä seuraa, että luonnollisen kannan vektorien $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ kuvavektorit ovat matriisin A sarakkeet. Esimerkiksi

$$L_A(\bar{e}_1) = A\bar{e}_1 = 1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + 0\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

Matriisin A sarakkeet taas valittiin niin, että ne ovat kantavektorien kuvavektorit kuvauksessa T. Siten $L_A(\bar{e}_i) = T(\bar{e}_i)$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Lineaarikuvaukset L_A ja T ovat siten lauseen 21.1 nojalla sama kuvaus, eli $T(\bar{v}) = A\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$.

Osoitetaan vielä, että ehdon toteuttavia matriiseja ei ole enempää kuin yksi. Oletetaan, että sekä matriisin A että matriisin B määräämä kuvaus on T eli $L_A = T$ ja $L_B = T$. Edellä nähtiin, että matriisin määräämässä kuvauksessa luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit ovat matriisin sarakkeet. Koska kuvaukset L_A ja L_B ovat samat, on luonnollisen kannan vektoreilla näissä kuvauksissa samat kuvavektorit. Siten matriisien A ja B sarakkeet ovat samat, eli kyseessä on sama matriisi. Näin ollen on olemassa vain yksi matriisi, jonka määrämä lineaarikuvaus on T. □

Määritelmä 21.8. Oletetaan, että $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus. Edellisessä lauseessa määriteltyä matriisia

$$A = \begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & T(\bar{e}_2) & \ldots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}$$

kutsutaan lineaarikuvauksen T *(standardi)matriisiksi.*

Jos A on lineaarikuvauksen $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ matriisi, niin $T(\bar{v}) = A\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$.

Esimerkki 21.9. Määritetään esimerkin 18.4 lineaarikuvauksen

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (7x_2,\ x_1 - 3x_3)$$

matriisi lauseen 21.7 avulla. Tätä varten tarvitaan luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit kuvauksessa L:

$$L(1,0,0) = (0,1), \quad L(0,1,0) = (7,0), \quad L(0,0,1) = (0,-3).$$

Nyt kuvauksen L matriisi saadaan asettamalla nämä kuvavektorit matriisin sarakkeiksi. Siten matriisi on

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Lopuksi voi vielä halutessaan tarkistaa, että matriisilla kertominen tosiaankin tuottaa lineaarikuvauksen arvot. Oletetaan, että $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$. Nyt

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_2 \\ x_1 - 3x_3 \end{bmatrix},$$

ja nähdään, että tuloksena on vektorin (x_1, x_2) kuva kuten pitikin.

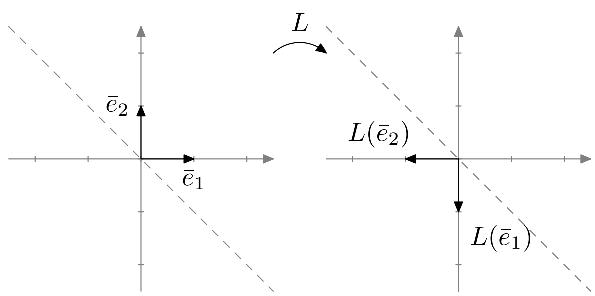
Vaihtoehtoisesti kuvauksen matriisin voi etsiä samalla tavalla kuin esimerkissä 18.10.

Esimerkki 21.10. Esimerkissä 18.9 näytetiin, miten joitakin lineaarikuvauksia voidaan ajatella venytyksinä, peilauksina tai kiertoina. Nyt kun tiedetään, kuinka lineaarikuvauksen matriisi muodostetaan, on geometrisen tulkinnan avulla helppo johtaa tällaisen lineaarikuvauksen matriisi.

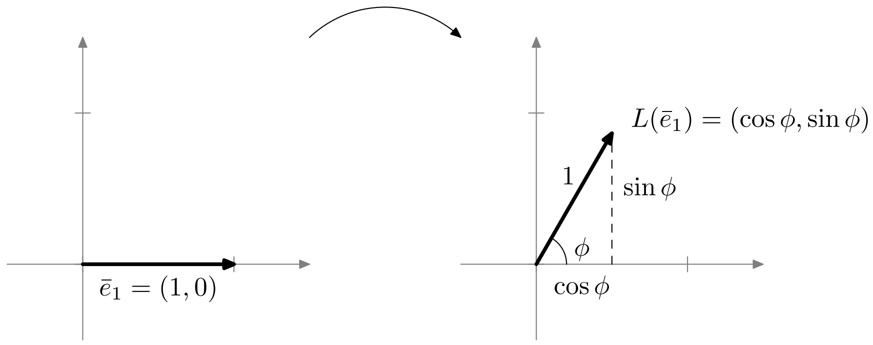
Tutkitaan vaikkapa, millainen matriisi on lineaarikuvauksella L, joka peilaa tason vektorit suoran $\text{span}\big((-1, 1)\big)$ suhteen. (Jos ollaan tarkkoja, pitäisi ensin osoittaa, että kyseinen kuvaus todellakin on lineaarikuvaus. Se jätetään tällä kertaa väliin.) Matriisin sarakkeiksi tulevat luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit. Nähdään, että kantavektori $(1, 0)$ kuvautuu vektorille $(0, -1)$ ja kantavektori $(0, 1)$ kuvautuu vektorille $(-1, 0)$. Nämä vektorit ovat kuvauksen L matriisin B sarakkeet:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

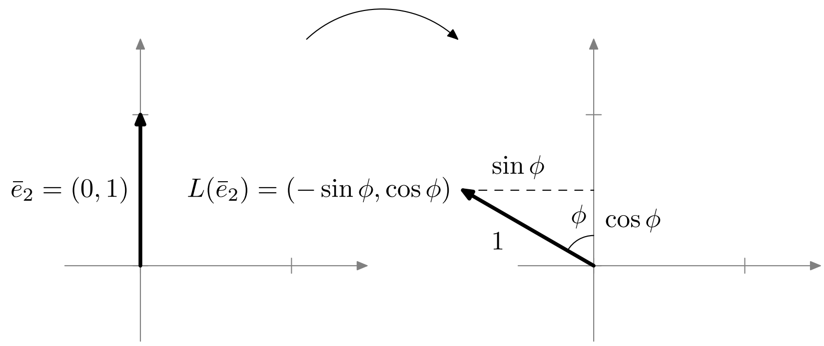
Nyt siis $L(\bar{v}) = B\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$.



Kuva 21.13: Kantavektorien $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ kuvautuminen lineaarikuvauksessa L.



Kuva 21.14: Kantavektorin $\bar{e}_1$ kuvautuminen kiertokuvauksessa.



Kuva 21.15: Kantavektorin $\bar{e}_2$ kuvautuminen kiertokuvauksessa.

Esimerkki 21.11. Tarkastellaan lineaarikuvausta, joka kiertää tason vektoreita ϕ astetta vastapäivään. (Jätämme jälleen todistamatta, että kuvaus on todellakin lineaarikuvaus.) Lineaarikuvauksen matriisia varten tarvitsemme luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit. Kuvista 21.14 ja 21.15 näkyy, että vektorin $(1, 0)$ kuva on $(\cos\phi, \sin\phi)$ ja vektorin $(0, 1)$ kuva on $(-\sin\phi, \cos\phi)$. Siten kiertokuvauksen matriisi on

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$