8 Kanta

Tässä luvussa W on vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$ virittämä aliavaruus eli

$$W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m).$$

Määritelmä 8.1. Oletetaan, että $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k \in W$. Vektorijono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta, jos

a) $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ ja

b) $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa.

Esimerkki 8.2. Esimerkissä 6.1 osoitettiin, että vektorit $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^2$. Jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on lisäksi vapaa esimerkin 7.2 perusteella. Siten $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Vastaavasti avaruudella $\mathbb{R}^n$ on kanta

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n).$$

Tässä $\bar{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, missä luku 1 on vektorin i:s komponentti. Kantaa kutsutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ *luonnolliseksi kannaksi.* Lukijan tehtäväksi jätetään osoittaa, että kyseessä on todellakin kanta.

Kanta siis virittää aliavaruuden ja on lisäksi vapaa. Lauseesta 7.6 saadaan seuraava hyvin käyttökelpoinen tulos:

Lause 8.3. *Jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden W vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa.*

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta. Tällöin kannan määritelmän nojalla $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ ja jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa. Lauseesta 7.6 seuraa, että jokainen aliavaruuden $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ vektori voidaan kirjoittaa tasan yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että jokainen aliavaruuden W vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa. Tästä seuraa ensinnäkin, että $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$. Nyt lauseen 7.6 mukaan jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa. Näin kannan määritelmän molemmat ehdot täyttyvät. Siis $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta. □

Esimerkki 8.4. Merkitään $\bar{w}_1 = (2, -1)$, $\bar{w}_2 = (1, 3)$. Osoitetaan lauseen 1.3 avulla, että $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$. Ratkaistaan yhtälö $x_1\bar{w}_1 + x_2\bar{w}_2 = \bar{v}$ eli yhtälö $x_1(2, -1) + x_2(1, 3) = (v_1, v_2)$. Sitä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = v_1 \\ -x_1 + 3x_2 = v_2. \end{cases}$$

Kun yhtälöryhmän matriisia muokataan alkeisriviotoimituksilla, saadaan matriisi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (3v_1 - v_2)/7 \\ 0 & 1 & (v_1 + 2v_2)/7 \end{array}\right].$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu riippumatta vektorista $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$. Siis jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

8.1 Koordinaatit

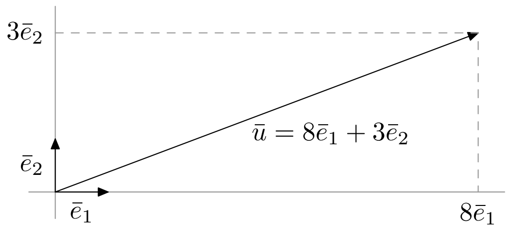
Määritelmä 8.5. Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta. Oletetaan, että $\bar{u} \in W$. Vektorin $\bar{u}$ *koordinaateiksi kannan* $\mathcal{B}$ *suhteen* kutsutaan reaalilukuja $a_1, \ldots, a_k$, joilla

$$\bar{u} = a_1\bar{w}_1 + \cdots + a_k\bar{w}_k\,.$$

Huomaa, että vektorin koordinaatit jokin tietyn kannan suhteen ovat yksikäsitteiset, sillä vektori voidaan lauseen 1.3 mukaan kirjoitaa vain yhdellä tavalla kannan alkioiden lineaarikombinaationa. Vektorilla on siis vain yhdet koordinaatit jonkin tietyn kannan suhteen. Eri kantojen suhteen saman vektorin koordinaatit voivat tietenkin olla erilaisia.

Esimerkki 8.6. Määritetään vektorin $\bar{u} = (8, 3)$ koordinaatit avaruuden $\mathbb{R}^2$ luonnollisen kannan $\mathcal{E}_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ suhteen. Koordinaatit ovat 8 ja 3, sillä

$$\bar{u} = 8(1, 0) + 3(0, 1) = 8\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2.$$



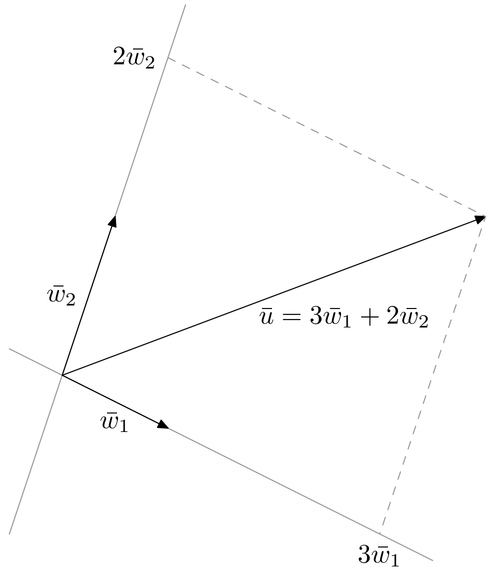
Kuva 8.21: Vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{E}_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ suhteen ovat 8 ja 3.

Tutkitaan sitten vektorin $\bar{u}$ koordinaatteja jonkin toisen kannan suhteen. Merkitään $\bar{w}_1 = (2, -1)$, $\bar{w}_2 = (1, 3)$. Esimerkin 1.4 perusteella $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Määritetään vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ suhteen. On siis ratkaistava yhtälö $x_1\bar{w}_1 + x_2\bar{w}_2 = \bar{u}$ eli yhtälö $x_1(2, -1) + x_2(1, 3) = (8, 3)$. Esimerkistä 1.4 nähdään, että yhtälön ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = (3u_1 - u_2)/7 = (24 - 3)/7 = 3 \\ x_2 = (v_1 + 2v_2)/7 = (8 + 6)/8 = 2\,. \end{cases}$$

Siis $\bar{u} = 3\bar{w}_1 + 2\bar{w}_2$, eli kysytyt koordinaatit ovat 3 ja 2. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 1.2.



Kuva 8.22: Vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ suhteen ovat 3 ja 2.

8.2 Dimensio

Aliavaruudella voi olla useita eri kantoja, mutta jokaisessa niistä on yhtä monta vektoria.

Lause 8.7. *Aliavaruuden W jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria.*

Todistus. Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$ ja $\mathcal{C} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ ovat molemmat aliavaruuden W kantoja. Pyritään osoittamaan, että $j = k$. Tehdään se osoittamalla, että muut vaihtoehdot $j < k$ ja $k < j$ johtavat ristiriitaan.

Oletetaan, että $j < k$. Tarkastellaan yhtälöä

$$x_1\bar{w}_1 + \cdots + x_k\bar{w}_k = \bar{0}\,. \tag{3}$$

Koska $\mathcal{B}$ on W:n kanta, voidaan kaikki kannan $\mathcal{C}$ vektorit kirjoittaa kannan $\mathcal{B}$ vektorien lineaarikombinaatioina:

$$\begin{aligned}
\bar{w}_1 &= a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{v}_2 + \cdots + a_{1j}\bar{v}_j \\
\bar{w}_2 &= a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + \cdots + a_{2j}\bar{v}_j \\
&\vdots \\
\bar{w}_k &= a_{k1}\bar{v}_1 + a_{k2}\bar{v}_2 + \cdots + a_{kj}\bar{v}_j
\end{aligned}$$

joillakin $a_{11}, \dots, a_{kj} \in \mathbb{R}$.

Sijoittamalla nämä yhtälöön (1) saadaan yhtäpitävä yhtälö:

$$\begin{aligned} x_1(a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{v}_2 + \cdots + a_{1j}\bar{v}_j) \\ + x_2(a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + \cdots + a_{2j}\bar{v}_j) \\ + \cdots + x_k(a_{k1}\bar{v}_1 + a_{k2}\bar{v}_2 + \cdots + a_{kj}\bar{v}_j) = \bar{0} \end{aligned}$$

ja edelleen ryhmittelemällä:

$$\begin{aligned} (x_1a_{11} + x_2a_{21} + \cdots + x_ka_{k1})\bar{v}_1 \\ + (x_1a_{12} + x_2a_{22} + \cdots + x_ka_{k2})\bar{v}_2 \\ + \cdots + (x_1a_{1j} + x_2a_{2j} + \cdots + x_ka_{kj})\bar{v}_j = \bar{0} \end{aligned}$$

Jono $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$ on kanta, joten se on vapaa. Siten edellinen yhtälö toteutuu, jos ja vain jos kaikki kertoimet ovat nollia:

$$\begin{cases} x_1a_{11} + x_2a_{21} + \cdots + x_ka_{k1} = 0 \\ x_1a_{12} + x_2a_{22} + \cdots + x_ka_{k2} = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad = \vdots \\ x_1a_{1j} + x_2a_{2j} + \cdots + x_ka_{kj} = 0 \end{cases}$$

Kyseessä on homogeeninen yhtälöryhmä, jossa tuntemattomien määrä k on suurempi kuin yhtälöiden määrä j. Lauseen 7.10 mukaan yhtälöryhmällä on muitakin ratkaisuja kuin $x_1 = 0, \dots, x_k = 0$. Siis jono $\mathcal{C} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ on sidottu. Tämä on ristiriita, sillä $\mathcal{C}$ on aliavaruuden W kanta.

Tapaus $j > k$ käsitellään vastaavasti. Tällöinkin päädytään ristiriitaan. Siten täytyy päteä $j = k$. □

Voidaan osoittaa, että jokaisella avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudella on kanta. (Tämä todistetaan kurssin toisessa osassa.) Lisäksi edellä nähtiin, että jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria. Kantavektorien lukumäärää kutsutaan avaruuden dimensioksi.

Määritelmä 8.8. Aliavaruuden W *dimensio* $\dim(W)$ on aliavaruuden W kannan vektoreiden lukumäärä.

Jos aliavaruuden dimensio on n, sanotaan, että aliavaruus on *n-ulotteinen.*

Esimerkki 8.9. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ dimensio on 2, sillä avaruudella on kanta $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Vastaavasti avaruuden $\mathbb{R}^n$ dimensio on n, sillä avaruuden luonnollisen kannan vektorien lukumäärä on n.

Esimerkki 8.10. Merkitään $\bar{v}_1 = (3, -1, 5)$, $\bar{v}_2 = (2, 1, 3)$ ja $\bar{v}_3 = (0, -5, 1)$. Olkoon $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Määritetään aliavaruuden W dimensio.

Oletetaan, että $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$. Selvitetään, mikä ehto vektorin $\bar{u}$ komponenttien pitää toteuttaa, jotta $\bar{u}$ on aliavaruudessa W. Ratkaistaan yhtälö $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{u}$ eli yhtälö

$$x_1(3, -1, 5) + x_2(2, 1, 3) + x_3(0, -5, 1) = (u_1, u_2, u_3).$$

Sitä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}-5x_3} = u_1 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = u_2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = u_3\,. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 3 & 2 & 0 & u_1 \\ -1 & 1 & -5 & u_2 \\ 5 & 3 & 1 & u_3 \end{array}\right]$$

ja se saadaan alkeisrivitoimituksilla muutettua matriisiksi

$$\left[\begin{array}{lrr|c} 1 & -1 & 5 & -u_2 \\ 0 & 1 & -3 & (u_1 + 3u_2)/5 \\ 0 & 0 & 0 & (5u_3 + u_2 - 8u_1)/5 \end{array}\right].$$

Havaitaan, että yhtälöryhmällä on ratkaisu, jos ja vain jos alinta riviä vastaava yhtälö $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = (5u_3 + u_2 - 8u_1)/5$ on tosi eli $5u_3 + u_2 - 8u_1 = 0$. Siten

$$\begin{aligned} W &= \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) \\ &= \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 5u_3 + u_2 - 8u_1 = 0\} \\ &= \{(u_1, 8u_1 - 5u_3, u_3) \mid u_1, u_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u_1(1, 8, 0) + u_3(0, -5, 1) \mid u_1, u_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}((1, 8, 0), (0, -5, 1)). \end{aligned}$$

Nyt tiedetään, että vektorit $(1, 8, 0)$ ja $(0, -5, 1)$ virittävät aliavaruuden. Lisäksi nämä kaksi vektoria ovat lineaarisesti riippumattomia. (Tämän osoittaminen jätetään lukijalle.) Siten jono $((1, 8, 0), (0, -5, 1))$ on avaruuden W kanta, ja $\dim(W) = 2$.

9 Matriisit

Reaalialkioinen $m \times n$ *-matriisi* on reaalilukutaulukko, jossa on m riviä ja n saraketta. Esimerkiksi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

on $m \times n$ -matriisi. Voidaan myös sanoa, että matriisin A *tyyppi* on $m \times n$. Kaikkien reaalikertoimisten $m \times n$ -matriisien joukkoa merkitään $\mathbb{R}^{m\times n}$. Matriisissa olevia lukuja kutsutaan matriisin *alkioiksi*, ja rivillä i sarakkeessa j olevaa alkiota merkitään $A(i,j)$. Esimerkiksi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 11 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -6 \end{bmatrix}$$

on reaalikertoiminen 4×3 -matriisi eli $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$. Nähdään, että $B(1,3) = 5$ ja $B(2,2) = 11$.

Samalla tavalla voidaan määritellä kompleksialkioisten matriisien joukot $\mathbb{C}^{m\times n}$. Kaikki jatkossa esiteltävät ominaisuudet pätevät myös kompleksimatriiseille, vaikka tekstissä puhutaan vain reaalialkioisista matriiseista.

9.1 Matriisien laskutoimituksia

Matriisien *yhteenlasku* määritellään seuraavasti. Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matriisien A ja B summa saadaan laskemalla yhteen samoissa kohdissa olevat alkiot. Tuloksena on $m \times n$ -matriisi $A + B$, jolle pätee

$$(A + B)(i,j) = A(i,j) + B(i,j)$$

kaikilla $i \in \{1, \dots, m\}$ ja $j \in \{1, \dots, n\}$. Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vain matriiseja, joilla on sama tyyppi, voidaan laskea yhteen.

Minkä tahansa matriisin $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ voi kertoa reaaliluvulla c, ja tätä toimitusta kutsutaan *skalaarikertolaskuksi*. Saatava tulos on $m \times n$ -matriisi cA, jota nimitetään matriisin A *skalaarimonikerraksi* ja jolle pätee

$$(cA)(i,j) = c \cdot A(i,j)$$

kaikilla $i \in \{1, \dots, m\}$ ja $j \in \{1, \dots, n\}$. Esimerkiksi

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriisia $(-1)A$ on tapana merkitä $-A$ ja matriisisummaa $A + (-B)$ on tapana merkitä $A - B$.

Matriiseille voidaan määritellä myös *matriisikertolasku*. Tämä laskutoimitus on hieman monimutkaisempi kuin edellä määritellyt. Kaksi matriisia voidaan kertoa keskenään vain, jos ensimmäisessä on yhtä paljon sarakkeita kuin toisessa on rivejä. Olkoot siis $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Tällöin tulo AB on $m \times p$ -matriisi, jolle pätee

$$\begin{aligned} (AB)(i,j) &= A(i,1)B(1,j) + A(i,2)B(2,j) + \dots + A(i,n)B(n,j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,j) \end{aligned}$$

kaikilla $i \in \{1, \dots, m\}$ ja $j \in \{1, \dots, p\}$.*

Esimerkki 9.1. Lasketaan matriisien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tulo. Koska matriisissa A on kolme saraketta (tyyppi 2×3) ja matriisissa B on vastaavasti kolme riviä (tyyppi 3×2), matriisit voidaan kertoa keskenään. Tulosmatriisi on tyyppiä 2×2. Määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esimerkki 9.2. Matriisikertolasku ei ole vaihdannainen operaatio eli tulon tekijöiden järjestystä ei voi vaihtaa. Tarkastellaan vaikkapa matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Merkintä $\sum_{k=1}^{n} c_k$ tarkoittaa summaa $c_1 + c_2 + \dots + c_n$.

Huomataan, että

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{mutta} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Siten $AB \neq BA$.

Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi ja $k \in \{1, 2, \dots\}$. Tällöin voidaan määritellä *matriisipotenssi*

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ kpl}}.$$

9.2 Erityisiä matriiseja

Matriisia

$$O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

jonka kaikki alkiot ovat nollia, kutsutaan *nollamatriisiksi*. *Ykkösmatriisi* puolestaan on

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Ei ole vaikea nähdä, että matriisikertolaskussa ykkösmatriisit käyttäytyvät kuin reaaliluku 1 tavallisessa kertolaskussa: kaikilla $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ pätee

$$I_m A = A I_n = A.$$

Jos matriisien tyypeistä ei ole epäselvyyttä, saatetaan merkitä yksinkertaisemmin $O_{m\times n} = O$ ja $I_n = I$.

Neliömatriisi on matriisi, jossa on yhtä monta riviä ja saraketta. Neliömatriisin alkio on *lävistäjällä*, jos alkion rivin ja sarakkeen numerot ovat samat. Matriisi, jonka kaikki nollasta poikkeavat alkiot ovat lävistäjällä, on *lävistäjämatriisi*. Lävistäjämatriisi, jonka kaikki lävistäjäalkiot ovat samoja, on puolestaan *skalaarimatriisi*. Skalaarimatriisit ovat ykkösmatriisin skalaarimonikertoja. Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

on lävistäjämatriisi ja

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I_3$$

on skalaarimatriisi.

9.3 Matriisien laskusääntöjä

Lause 9.3. *Seuraavat säännöt pätevät matriiseille A, B ja C sekä reaaliluvulle a, jos laskutoimitukset on määritelty:*

a) $A + B = B + A$

b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) $A(BC) = (AB)C$

d) $A(B + C) = AB + AC$

e) $(A + B)C = AC + BC$

f) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$

Todistus. Osoitetaan esimerkin vuoksi kohta d). Muiden kohtien tarkistaminen jätetään lukijalle.

Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $B, C \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Nyt $A(B + C)$ ja $AB + AC$ ovat molemmat $m \times p$ -matriiseja. On osoitettava, että kyseisten matriisien alkiot ovat samoja. Olkoot $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ja $j \in \{1, 2, \dots, p\}$. Nähdään, että

$$\begin{aligned}
\big(A(B + C)\big)(i, j) &= \sum_{k=1}^{n} A(i, k) \cdot (B + C)(k, j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A(i, k)\big(B(k, j) + C(k, j)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(A(i, k)B(k, j) + A(i, k)C(k, j)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A(i, k)B(k, j) + \sum_{k=1}^{n} A(i, k)C(k, j) \\
&= (AB)(i, j) + (AC)(i, j) \\
&= (AB + AC)(i, j).
\end{aligned}$$

Koska matriisit $A(B + C)$ ja $AB + AC$ ovat samaa tyyppiä ja niillä on täsmälleen samat alkiot, pätee $A(B + C) = AB + AC$. □

9.4 Matriisin transpoosi

Määritelmä 9.4. Oletetaan, että A on $m \times n$ -matriisi. Sen *transpoosi* A^T on $n \times m$-matriisi, joka saadaan vaihtamalla matriisin A rivit ja sarakkeet keskenään.

Esimerkiksi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

transpoosi on

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 9.5. Neliömatriisin A sanotaan olevan *symmetrinen*, jos $A^T = A$. Neliömatriisin A sanotaan olevan *antisymmetrinen*, jos $A^T = -A$.

Merkitään

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} = B \quad \text{ja} \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = -C.$$

Siis B on symmetrinen ja C on antisymmetrinen.

Lause 9.6. *Seuraavat säännöt pätevät matriiseille A ja B sekä reaaliluvulle t, jos laskutoimitukset on määritelty (ts. matriisit ovat sopivaa tyyppiä):*

a) $(A^T)^T = A$

b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

c) $(AB)^T = B^T A^T$

d) $(tA)^T = t(A^T)$.

Todistus. Osoitetaan todeksi kohta c) ja jätetään loput kohdat lukijalle. Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Nyt $(AB)^T$ ja $B^T A^T$ ovat molemmat $p \times m$ -matriiseja. On osoitettava, että kyseisten matriisien alkiot ovat samoja. Olkoot $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ ja $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Nähdään, että

$$\begin{aligned}(AB)^T(i,j) &= \big(AB\big)(j,i) = \sum_{k=1}^{n} A(j,k) \cdot B(k,i) = \sum_{k=1}^{n} A^T(k,j) \cdot B^T(i,k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} B^T(i,k) \cdot A^T(k,j) = (B^T A^T)(i,j).\end{aligned}$$

Siten $(AB)^T = B^T A^T$. □

9.5 Käänteismatriisi

Olkoon A neliömatriisi. Jos on olemassa saman tyyppinen neliömatriisi B, jolle pätee

$$AB = I \quad \text{ja} \quad BA = I,$$

sanotaan, että A on *kääntyvä* ja B on matriisin A *käänteismatriisi*.

Esimerkki 9.7. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi on

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

sillä

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lause 9.8. *Matriisilla on korkeintaan yksi käänteismatriisi.*

Todistus. Oletetaan, että matriisilla A on käänteismatriisit B ja B'. Nyt

$$B = B \cdot I = B \cdot (A \cdot B') = (B \cdot A) \cdot B' = I \cdot B' = B'.$$

Siten B ja B' ovat välttämättä sama matriisi. Näin ollen käänteismatriiseja ei voi olla enempää kuin yksi. □

Jos matriisi A on kääntyvä, sen käänteismatriisille käytetään merkintää A^{-1}. Huomaa, että merkintää A^{-1} ei voi käyttää ennen kuin on perustellut, että matriisi A todella on kääntyvä.

Lause 9.9. *Oletetaan, että matriisit A ja B ovat kääntyviä. Tällöin myös matriisit A^{-1}, AB ja A^T ovat kääntyviä. Niiden käänteismatriisit ovat seuraavat:*

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Todistus. Lauseen matriisit osoitetaan kääntyviksi näyttämällä, että niillä on käänteismatriisi.

Osoitetaan matriisi A^{-1} on kääntyväksi näyttämällä, että sen käänteismatriisi on A. Koska $A^{-1}A = I$ ja $AA^{-1} = I$, on A matriisin A^{-1} käänteismatriisi eli $(A^{-1})^{-1} = A$. Matriisia AB koskevien väitteiden todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

Osoitetaan lopuksi, että $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Lauseen 2.6 nojalla

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I,$$

ja samalla tavalla osoitetaan, että $(A^{-1})^T A^T = I$. Siten $(A^{-1})^T$ on matriisin A^T käänteismatriisi. Tästä seuraa myös, että matriisi A^T on kääntyvä. □

Lause 9.10. *Matriisi*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

on kääntyvä, jos ja vain jos $ad - bc \neq 0$. *Jos matriisi* A *on kääntyvä, sen käänteismatriisi on*

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ c & a \end{bmatrix}.$$

Todistus. Oletetaan, että $ad - bc \neq 0$. Merkitään

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ c & a \end{bmatrix}.$$

Laskemalla voidaan todeta, että $AB = I$ ja $BA = I$. Siten B on matriisin A käänteismatriisi, ja A on kääntyvä.

Oletetaan sitten, että $ad - bc = 0$. Nyt on tutkittava kaksi eri tapausta: joko $a = 0$ tai $a \neq 0$. Jos $a = 0$, niin $bc = 0$. Siten joko $b = 0$ tai $c = 0$. Tällöin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{tai} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Kummassakaan tapauksessa ei ole olemassa matriisia B, jolle pätee $AB = I$. Tuloon AB tulee nimittäin välttämättä nollarivi tai nollasarake. Siten A ei ole kääntyvä.

Tutkitaan sitten tapaus $a \neq 0$. Nyt $d = bc/a$ ja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{bc}{a} \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että on olemassa sellainen matriisi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

että $AB = I$. Tällöin

$$\begin{cases} ax + bz &= 1 \\ ay + bw &= 0 \\ cx + (bc/a)z &= 0 \\ cy + (bc/a)w &= 1. \end{cases}$$

Kolmannen yhtälön perusteella $c(x + bz/a) = 0$. Jos $c = 0$, päädytään samanlaiseen tilanteeseen kuin silloin, jos $a = 0$. Siten voidaa olettaa, että $c \neq 0$. Tällöin täytyy päteä $x + bz/a = 0$ eli $x = -bz/a$. Toisaalta ensimmäisen yhtälön perusteella $x = (1 - bz)/a$. Nyt $-bz = 1 - bz$, joten $1 = 0$. Tämä on mahdotonta. Siten matriisilla A ei ole käänteismatriisia. □

Suurempien matriisien käänteismatriiseille ei ole yhtä helppoa kaavaa. Käänteismatriisin määrittämistä käsitellään lisää luvussa 3.2.

9.6 Sarakevektorit

Usein avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ samastetaan matriisin

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

kanssa. Joukon $\mathbb{R}^{n\times 1}$ alkioita kutsutaan *sarakevektoreiksi*. Jos avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita ajatellaan sarakevektoreina, voi niitä kertoa matriiseilla. Jos $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, on tulo $A\bar{v}$ määritelty, kun $\bar{v}$ tulkitaan joukon $\mathbb{R}^{n\times 1}$ alkioksi.

Esimerkki 9.11. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ja vektorin $\bar{v} = (-5, 3)$ tulo on

$$A\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Tämä sarakevektori voidaan samastaa vektorin $(2, 5, 13)$ kanssa.

10 Matriisit ja yhtälöryhmät

Tulemme näkemään, että lineaariset yhtälöryhmät voidaan esittää käyttäen matriisikertolaskua. Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases} \tag{4}$$

kerroinmatriisiksi kutsutaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Kerätään vielä muuttujat ja vakiot omiksi matriiseikseen:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Nyt yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa matriisien avulla. Huomataan nimittäin, että

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Matriisissa $A\bar{x}$ näkyy siis yhtälöryhmän vasen puoli. Yhtälöryhmä voidaan näin ollen kirjoittaa muodossa $A\bar{x} = \bar{b}$.

Lause 10.1. *Jos matriisi A on kääntyvä, yhtälöllä on $A\bar{x} = \bar{b}$ täsmälleen yksi ratkaisu.*

Todistus. Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Todistuksessa on kaksi osaa. On osoitettava, että yhtälöllä on jokin ratkaisu ja että ratkaisuja ei ole enempää kuin yksi.

Osoitetaan ensin, että yhtälölle löytyy jokin ratkaisu. Koska A on kääntyvä, on olemassa käänteismatriisi A^{-1}. Nähdään, että $A^{-1}\bar{b}$ on yhtälön ratkaisu, sillä

$$A(A^{-1}\bar{b}) = (AA^{-1})\bar{b} = I\bar{b} = \bar{b}.$$

Osoitetaan sitten, ettei muita ratkaisuja ole. Oletetaan, että $\bar{y}$ on jokin (toinen) ratkaisu. Tällöin $A\bar{y} = \bar{b}$. Kerrotaan yhtälön molemmat puolet matriisilla A^{-1}, jolloin saadaan

$$A^{-1}(A\bar{y}) = A^{-1}\bar{b}$$

ja edelleen $\bar{y} = A^{-1}\bar{b}$. Kysymyksessä onkin sama ratkaisu, joka löydettiin jo aikaisemmin. Siten ratkaisuja on vain yksi ja se on $A^{-1}\bar{b}$. □

10.1 Alkeismatriisit

Tässä luvussa nähdään, miten alkeisrivitoimitukset voi ilmaista matriisikertolaskun avulla. Osoittautuu, että jos matriisia kerrotaan niin kutsutulla alkeismatriisilla, tullaan matriisille tehneeksi alkeisrivitoimitus. Tästä tulee olemaan hyötyä kääntyvien matriisien käsittelyssä.

Määritelmä 10.2. Matriisi on *alkeismatriisi*, jos se on saatu ykkösmatriisista yhdellä alkeisrivitoimituksella.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat alkeismatriiseja:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nämä alkeismatriisit on saatu ykkösmatriisista tekemällä alkeisrivitoimitukset $-\frac{1}{2}R_3$, $R_2 \leftrightarrow R_4$ ja $R_3 + 3R_1$.

Esimerkki 10.3. Osoittautuu, että alkeismatriiseilla kertominen vastaa alkeisrivitoimitusten tekemistä. Tutkitaan tätä edellisen esimerkin alkeismatriisien ja matriisin

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

avulla. Nähdään, että

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\boldsymbol{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -\boldsymbol{\frac{1}{2}} a_{31} & -\boldsymbol{\frac{1}{2}} a_{32} & -\boldsymbol{\frac{1}{2}} a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix},$$

$$E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \boldsymbol{a_{41}} & \boldsymbol{a_{42}} & \boldsymbol{a_{43}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{41}} & \boldsymbol{a_{42}} & \boldsymbol{a_{43}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \end{bmatrix}$$

ja

$$E_3 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{a_{11}} + a_{31} & \mathbf{3}\boldsymbol{a_{12}} + a_{32} & \mathbf{3}\boldsymbol{a_{13}} + a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

Huomataan, että tässä tapauksessa alkeismatriisilla kerrottaessa matriisille A tullaan tehneeksi sama alkeisrivioperaatio, jonka avulla alkeismatriisi muodostettiin.

Yksittäinen esimerkki ei takaa, että alkeismatriisilla kertominen vastaa aina alkeisrivitoimituksen tekemistä. Esimerkin perusteella voi kuitenkin ymmärtää, miksi näin on. Väitteen todistaminen on melko työlästä, joten se jätetään väliin.

Lemma 10.4. *Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Olkoon E alkeismatriisi, joka saadaan tekemällä jokin alkeisrivitoimitus ykkösmatriisille I_n. Jos matriisille A tehdään sama alkeisrivitoimitus, tuloksena on matriisi EA.*

Huom. Lemma tarkoittaa apulausetta. Se on siis pieni tulos, jota voidaan käyttää hyväksi vaikkapa suurempien lauseiden todistamisessa.

Lause 10.5. *Alkeismatriisit ovat kääntyviä, ja alkeismatriisin käänteismatriisi on myös alkeismatriisi.*

Todistus. Tarkkaa todistusta ei esitetä tässä. Käydään kuitenkin läpi todistuksen idea.

Jokainen alkeisrivitoimitus voidaan peruuttaa toisella alkeisrivitoimituksella kuten kohta nähdään. Kutsutaan tätä alkeisrivitoimitusta alkuperäisen alkeisrivitoimituksen *käänteistoimitukseksi.*

Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$. Jos matriisille tehdään alkeisrivitoimitus $R_i \leftrightarrow R_j$, päästään takaisin alkutilanteeseen tekemällä sama alkeisrivitoimitus uudelleen. Alkeisrivitoimitus $R_i \leftrightarrow R_j$ on siis itsensä käänteistoimitus. Alkeisrivitoimituksen aR_i käänteistoimitus on puolestaan $\frac{1}{a}R_i$, ja alkeisrivitoimituksen $R_i + bR_j$ käänteistoimitus on $R_i - bR_j$.

Alkeismatriisin käänteismatriisi saadaan aina käänteistoimitusta vastaavasta alkeismatriisista. Alkeisrivitoimitusta $R_i \leftrightarrow R_j$ vastaava alkeismatriisi on oma käänteismatriisinsa, alkeisrivitoimitusta aR_i vastaavan alkeismatriisin käänteismatriisi on alkeisrivitoimitusta $\frac{1}{a}R_i$ vastaava alkeismatriisi ja niin edelleen. Alkeisrivitoimituksen tekeminen vastaa nimittäin alkeismatriisilla kertomista. Esimerkiksi alkeisrivitoimitukset aR_i ja $\frac{1}{a}R_i$ peräkkäin suoritettuina eivät tee matriisille mitään. Siten niitä vastaavien alkeismatriisien tulo on ykkösmatriisi, jolla kertominen ei tee matriisille mitään.

□

Esimerkki 10.6. Etsitään alkeismatriisin

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Matriisi vastaa alkeisrivitoimitusta $R_3 + 3R_1$. Tämän alkeisrivitoimituksen voi kumota tekemällä alkeisrivitoimituksen $R_3 - 3R_1$. Sitä vastaava alkeismatriisi on

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla voi vielä varmistaa, että $EF = I$ ja $FE = I$. Siis $E^{-1} = F$.

Lause 10.7. *Oletetaan, että A on $n \times n$-neliömatriisi. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

a) Matriisi A on kääntyvä.

b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

d) Matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

e) Matriisi A on alkeismatriisien tulo.

Todistus. Osoitetaan väite todistamalla seuraava päättelyketju:

$$\text{a)} \Rightarrow \text{b)} \Rightarrow \text{c)} \Rightarrow \text{d)} \Rightarrow \text{e)} \Rightarrow \text{a)}.$$

Tämän jälkeen tiedetään, että jokainen lauseen kohta on yhtäpitävä toisten kohtien kanssa.

a) $\Rightarrow$ b): Väite on osoitettu lauseessa 3.1.

b) $\Rightarrow$ c): Oletetaan, että yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Tämä pätee myös, jos $\bar{b} = \bar{0}$. Toisaalta yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on aina ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$. Siten $\bar{x} = \bar{0}$ on ainoa ratkaisu.

c) $\Rightarrow$ d): Oletetaan, että yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$. Merkitään $A(i,j) = a_{ij}$ kaikilla $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Yhtälöä vastaava lineaarinen yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0, \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu ja muuttujia on yhtä monta kuin yhtälöitä, täytyy yhtälöryhmän olla ekvivalentti yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 0 \\ & x_2 & & = & 0 \\ & & & \vdots & \\ & & x_n & = & 0, \end{cases}$$

kanssa. Tämä tarkoittaa, että matriisi A saadaan alkeisrivitoimituksilla muutettua ykkösmatriisiksi. Toisin sanottuna A on riviekvivalentti matriisin I kanssa.

d) $\Rightarrow$ e): Oletetaan, että matriisi A riviekvivalentti ykkösmatrisiin kanssa. Olkoot $E_1, \ldots, E_k$ ne alkeismatriisit, joilla kertomalla matriisista A saadaan redusoitu porrasmatriisi. Nyt siis pätee

$$E_k \cdots E_1 A = I.$$

Kun yhtälön vasemmat puolet kerrotaan matriisilla E_k^{-1}, saadaan $E_{k-1} \cdots E_1 A = E_k^{-1}$. Kun tämän yhtälön vasemmat puolet kerrotaan matriisilla E_{k-1}^{-1}, saadaan $E_{k-2} \cdots E_1 A = E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$. Jatkamalla samaan tapaan päädytään yhtälöön

$$A = E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}.$$

Koska alkeismatriisin käänteismatriisi on myös alkeismatriisi, on väite todistettu.

e) $\Rightarrow$ a): Oletetaan, että $A = E_1 \cdots E_k$, missä $E_1, \ldots, E_k$ ovat alkeismatriiseja. Merkitään

$$B = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} AB &= (E_1 \cdots E_k^{-1})(E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}) = E_1 \cdots (E_k^{-1} E_k^{-1}) \cdots E_1^{-1} \\ &= E_1 \cdots E_{k-1}^{-1} I E_{k-1}^{-1} \cdots E_1^{-1} = \cdots \\ &= E_1 E_1^{-1} = I. \end{aligned}$$

Samalla tavalla nähdään, että $BA = I$. Siten B on matriisin A käänteismatriisi. $\square$

10.2 Käänteismatriisin määrittäminen

Muuttamalla matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi voidaan nähdä, onko matriisi kääntyvä. Jos matriisi A onnistutaan muuttamaan alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, niin A on kääntyvä eli sillä on käänteismatriisi A^{-1}. Muussa tapauksessa A ei ole kääntyvä.

Jos matriisi on käntyvä, käytetyistä alkeisrivitoimituksista saadaan myös selville, mikä käänteismatriisi on. Oletetaan, että matriisi A on muutettu ykkösmatriisiksi alkeisrivitoimituksilla, joita vastaavat alkeismatriisit $E_1, \ldots, E_k$. Nyt

$$E_k \ldots E_1 A = I.$$

Tällöin käänteismatriisille pätee

$$\begin{aligned} A^{-1} = IA^{-1} &= (E_k \ldots E_1 A) A^{-1} = E_k \ldots E_1 (AA^{-1}) \\ &= E_k \ldots E_1 I. \end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa, että tekemällä samat alkeisrivitoimitukset ykkösmatriisille I päädytään matriisiin A^{-1}.

Matriisin A kääntyvyyden selvittäminen ja käänteismatriisin etsiminen voidaan tehdä yhtä aikaa. Yhdistetään matriisit A ja I matrisiiksi $[A \mid I]$. Tehdään tälle matriisille alkeisrivitoimituksia, joilla A muutetaan redusoiduksi porrasmatriisiksi. Jos matriisi A saadaan muutettua alkeisrivitoimitusten avulla ykkösmatriisiksi, on A kääntyvä. Kuten edellä todettiin, samat alkeisrivitoimitukset muuttavat ykkösmatriisin I matriisin A käänteismatriisiksi A^{-1}. Siis

$$[A \mid I] \longrightarrow [I \mid A^{-1}].$$

Esimerkki 10.8. Tutkitaan, onko matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Muokataan yhdistettyä matriisia

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

alkeisrivitoimituksilla samaan tapaan kuin Gaussin-Jordanin menetelmässä. Tavoitteena on saada vasemmalle puolelle ykkösmatriisi.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + \frac{5}{2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 4R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Koska matriisi A saatiin muutettua alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, on A kääntyvä. Lisäksi sen käänteismatriisi on

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entä sitten, jos matriisi ei ole kääntyvä? Kuinka voidaan osoittaa, että matriisista ei saada alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisia? Voidaan osoittaa, että jos alkeisrivitoimitusten avulla saadaan aikaan nollarivi, ei matriisi voi olla riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa. (Todistusta ei esitetä tässä.) Nollarivi on siis merkki siitä, ettei matriisi ei ole kääntyvä.

Esimerkki 10.9. Tutkitaan, onko matriisilla

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Ryhdytään muokkaamaan yhdistettyä matriisia alkeisrivitoimituksilla:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-4R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-3R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Koska matriisin B paikalle tuli nollarivi, matriisista B ei saada alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisia. Siten B ei ole kääntyvä.