23.3 Kohtisuora projektio

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ vektorin $\bar{v}$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle alivaruudelle määriteltiin kaavalla

$$\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$

Ryhdymme nyt yleistämään projektion käsitettä. Uudessa määritelmässä aliavaruus, jolle projisoidaan, voi olla useamman kuin yhden vektorin virittämä. Lisäksi sisätuloavaruuden ei tarvitse olla avaruus $\mathbb{R}^n$ pistetulolla varustettuna, vaan voidaan käsitellä mitä tahansa sisätuloavaruutta.

Ennen kuin voimme antaa projektion yleisen määritelmän, on käsiteltävä ortogonaalisia jonoja. Sisätuloavaruuden V jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *ortogonaalinen*, jos seuraavat ehdot pätevät:

a) $\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle = 0$, kun $i \neq j$

b) $\bar{v}_i \neq \bar{0}$ kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

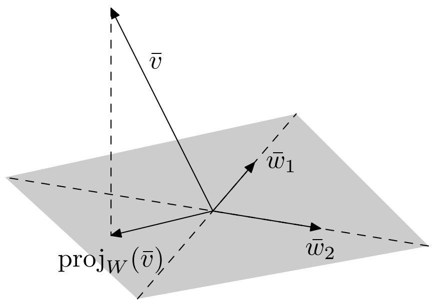
Toisin sanoen vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eikä mikään vektoreista ole nollavektori. Sisätuloavaruuden V jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *ortonormaali*, jos se on ortogonaalinen ja lisäksi

$$\|\bar{v}_i\| = 1 \quad \text{kaikilla } i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Toisin sanoen vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja niiden normi on yksi.

Määritelmä 23.18. Oletetaan, että W on sisätuloavaruuden V aliavaruus, jolla on ortogonaalinen kanta $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$. Vektorin $\bar{v} \in V$ *kohtisuora projektio aliavaruudelle* W on

$$\mathrm{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle} \bar{w}_1 + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_2 \rangle}{\langle \bar{w}_2, \bar{w}_2 \rangle} \bar{w}_2 + \cdots + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_k \rangle}{\langle \bar{w}_k, \bar{w}_k \rangle} \bar{w}_k.$$



Kuva 23.28: Vektorin $\bar{v}$ kohtisuora projektio aliavaruudelle $W = \mathrm{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$.

Usein kohtisuoraa projektiota kutsutaan lyhyesti vain projektioksi. Jos aliavaruus W on vain yhden vektorin virittämä eli $W = \operatorname{span}(\bar{w})$ jollakin $\bar{w} \in V$, voidaan kirjoittaa $\operatorname{proj}_W(\bar{v}) = \operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$. Tätä merkintää käyttäen

$$\operatorname{proj}_W(\bar{v}) = \operatorname{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}) + \operatorname{proj}_{\bar{w}_2}(\bar{v}) + \cdots + \operatorname{proj}_{\bar{w}_k}(\bar{v}).$$

Esimerkki 23.19. Merkitään $\bar{w}_1 = (1, 1, 0)$ ja $\bar{w}_2 = (-1, 1, 1)$. Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$, joka on vektoreiden $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ virittämä, origon kautta kulkeva taso. Sisätulona on tavallinen pistetulo. Havaitaan, että $\bar{w}_1 \nparallel \bar{w}_2$, joten jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on vapaa. Siten se on virittämänsä aliavaruden $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ kanta. Lisäksi $\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2 = -1 + 1 = 0$, joten kanta $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on ortogonaalinen.

Nyt voidaan määrittää vektorin $\bar{v} = (3, -1, 2)$ projektio aliavaruudelle W:

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_W(\bar{v}) &= \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle}\bar{w}_1 + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_2 \rangle}{\langle \bar{w}_2, \bar{w}_2 \rangle}\bar{w}_2 \\
&= \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\bar{w}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_2}{\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_2}\bar{w}_2 \\
&= \frac{3 - 1 + 0}{1 + 1 + 0}\bar{w}_1 + \frac{-3 - 1 + 2}{1 + 1 + 1}\bar{w}_2 \\
&= \bar{w}_1 - \frac{2}{3}\bar{w}_2 \\
&= \frac{1}{3}(5, 1, -2).
\end{aligned}$$

Kohtisuoran projektion määritelmässä on käytettävä avaruuden W *ortogonaalista kantaa*. Jos projektion kaavassa käyttää kantaa, joka ei ole ortogonaalinen, ei tulos ole toivottu. Luvussa 23.4 tulemme osoittamaan että jokaiselle äärellisulotteiselle avaruudelle löytyy ortogonaalinen kanta. Lisäksi osoitamme lauseessa 23.24, että valitulla kannalla ei ole vaikutusta siihen, mikä projektiovektori on. Oleellista on vain, että kanta on ortogonaalinen.

Esimerkki 23.20. Tarkastellaan vektorin $\bar{v} = (3, 2, 1)$ projektiota aliavaruudelle $W = \operatorname{span}\big(\bar{e}_1, \bar{e}_2\big)$, missä $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$. Jos aliavaruus W piirrettäisiin tavalliseen tapaan koordinaatistoon, se olisi origon kautta kulkeva vaakataso (eli xy-taso). Koska jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa, se on aliavaruuden W kanta, ja lisäksi vektorit $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ ovat ortogonaaliset. Projektion määritelmän mukaan $\operatorname{proj}_W(\bar{v})$ määritetään laskemalla vektorin $\bar{v}$ projektiot vektoreiden $(1, 0, 0)$ ja $(0, 1, 0)$ virittämille aliavaruuksille:

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_W(\bar{v}) &= \frac{\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle}{\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle}\bar{e}_1 + \frac{\langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle}{\langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle}\bar{e}_2 = \frac{\bar{v} \cdot \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1}\bar{e}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{e}_2}{\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2}\bar{e}_2 \\
&= \frac{3}{1}\bar{e}_1 + \frac{2}{1}\bar{e}_2 = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 = (3, 2, 0).
\end{aligned}$$

Voidaan ajatella, että vektorin projektio tasolle on varjo, jonka projektio heittää, kun aurinko paistaa kohtisuoraan tasoa vastaan. Nähdään, että tämän esimerkin tapauksessa näin todellakin on. Projisoitaessa vektorista katoaa kolmas komponentti.

Tutkitaan sitten, mitä tapahtuu, jos aliavaruudelle valitaan kanta, joka ei olekaan ortogonaalinen. Aliavaruudella W on myös kanta $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, missä $\bar{u}_1 = (1, 1, 0)$ ja $\bar{u}_2 = (0, 1, 0)$, eikä tämä kanta ole ortogonaalinen. Nyt vektorin $\bar{v} = (3, 2, 1)$ projektio vektorin $\bar{u}_1$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\text{proj}_{\bar{u}_1}(\bar{v}) = \frac{5}{2}\bar{u}_1$$

ja vektorin $\bar{u}_2$ virittämälle aliavaruudelle puolestaan

$$\text{proj}_{\bar{u}_2}(\bar{v}) = \frac{2}{1}\bar{u}_2 = 2\bar{u}_2.$$

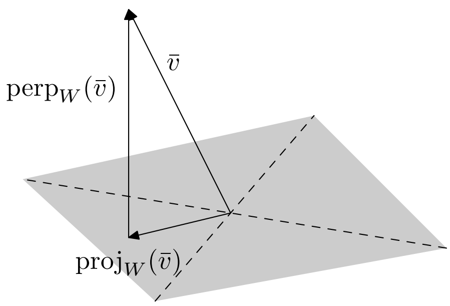
Näiden projektiovektoreiden summa on $(5/2, 9/2, 0)$, joten tulos on aivan erilainen kuin edellisissä laskuissa. Se ei vastaa käsitystämme siitä, miltä projektion pitäisi näyttää. Tämä johtui siitä, ettei käytetty kanta ollut ortogonaalinen.

Edellä mainittiin, että vektorin $\bar{v}$ projektio tasolle W on varjo, jonka projektio heittää, kun aurinko paistaa kohtisuoraan tasoa vastaan. Matemaattisesti tämä tarkoittaa sitä, että vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{v} - \text{proj}_W(\bar{v})$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Määritelmä 23.21. Oletetaan, että W on sisätuloavaruuden V äärellisulotteinen aliavaruus, jolla on ortogonaalinen kanta. Vektorin $\bar{v} \in V$ *kohtisuora komponentti aliavaruutta W vastaan* on

$$\text{perp}_W(\bar{v}) = \bar{v} - \text{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle}{\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle}\bar{w}_1.$$

Merkintä perp tulee englannin kielen sanasta ”perpendicular”, joka tarkoittaa kohtisuoraa.



Kuva 23.29: Vektorin $\bar{v}$ kohtisuora kohtisuora komponentti aliavaruutta W vastaan.

Esimerkki 23.22. Esimerkissä 23.19 nähtiin, että vektorin $\bar{v} = (3, -1, 2)$ kohtisuora projektio vektorien $\bar{w}_1 = (1, 1, 0)$ ja $\bar{w}_2 = (-1, 1, 1)$ virittämälle aliavaruudelle W on $\frac{1}{3}(5, 1, -2)$. Vektorin $\bar{v}$ kohtisuora komponentti aliavaruutta W vastaan on siten

$$\text{perp}_W(\bar{v}) = \bar{v} - \text{proj}_W(\bar{v}) = (3, -1, 2) - \frac{1}{3}(5, 1, -2) = \frac{1}{3}(4, -4, 4).$$

Vektorin $\bar{v}$ kohtisuora komponentti $\mathrm{perp}_W(\bar{v})$ on kohtisuorassa aliavaruutta W vastaan. Se kuuluu siis kohtisuoraan komplementtiin $W^\perp$.

Lause 23.23. *Oletetaan, että W on sisätuloavaruuden V äärellisulotteinen aliavaruus ja $\bar{v} \in V$. Tällöin $\mathrm{perp}_W(\bar{v}) \in W^\perp$.*

Todistus. Olkoon $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ aliavaruuden W ortogonaalinen kanta. Nyt siis

$$\langle \bar{w}_i, \bar{w}_j \rangle = 0, \text{kun } i \neq j.$$

Lauseen 23.15 nojalla riittää osoittaa, että $\langle \mathrm{perp}_W(\bar{v}), \bar{w}_i \rangle = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Oletetaan, että $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{perp}_W(\bar{v}), \bar{w}_i \rangle &= \langle \bar{v} - \mathrm{proj}_W(\bar{v}), \bar{w}_i \rangle \\
&= \langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle - \langle \mathrm{proj}_W(\bar{v}), \bar{w}_i \rangle \\
&= \langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle - \left\langle \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle} \bar{w}_1 + \cdots + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_k \rangle}{\langle \bar{w}_k, \bar{w}_k \rangle} \bar{w}_k, \bar{w}_i \right\rangle \\
&= \langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle - \left(\frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle} \langle \bar{w}_1, \bar{w}_i \rangle + \cdots + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_k \rangle}{\langle \bar{w}_k, \bar{w}_k \rangle} \langle \bar{w}_k, \bar{w}_i \rangle \right) \\
&= \langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle - \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle}{\langle \bar{w}_i, \bar{w}_i \rangle} \langle \bar{w}_i, \bar{w}_i \rangle \\
&= \langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle - \langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle = 0,
\end{aligned}$$

sillä $\langle \bar{w}_i, \bar{w}_j \rangle = 0$, kun $i \neq j$.

Vektori $\mathrm{perp}_W(\bar{v})$ on siis kohtisuorassa kaikkia kantavektoreita vastaan. Tästä seuraa, että $\mathrm{perp}_W(\bar{v}) \in W^\perp$. Huomaa, että todistuksessa käytettiin hyväksi sitä, että aliavaruudella W on ortogonaalinen kanta. □

Lause 23.24. *Oletetaan, että W on sisätuloavaruuden V äärellisulotteinen aliavaruus ja $v \in V$. Tällöin on olemassa täsmälleen yhdet vektorit $\bar{w} \in W$ ja $\bar{w}^\perp \in W^\perp$, joille pätee*

$$\bar{v} = \bar{w} + \bar{w}^\perp.$$

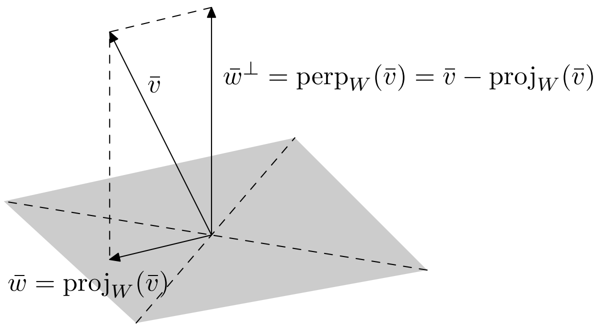
Osoittautuu, että lauseessa mainitut vektorit ovat $\mathrm{proj}_W(\bar{v})$ ja $\mathrm{perp}_W(\bar{v})$.

Todistus. Valitaan $\bar{w} = \mathrm{proj}_W(\bar{v})$ ja $\bar{w}^\perp = \mathrm{perp}_W(\bar{v}) = \bar{v} - \mathrm{proj}_W(\bar{v})$. Projektion määritelmästä nähdään, että $\bar{w} \in W$, ja lauseen 23.23 nojalla $\bar{w}^\perp \in W^\perp$. Lisäksi $\bar{v} = \bar{w} + \bar{w}^\perp$.

Osoitetaan vielä, että mitkään muut vektorit eivät toteuta annettuja ehtoja. Oletetaan, että $\bar{w}, \bar{u} \in W$, $\bar{w}^\perp, \bar{u}^\perp \in W^\perp$ ovat ehdot toteuttavia vektoreita. Nyt siis $\bar{v} = \bar{w} + \bar{w}^\perp = \bar{u} + \bar{u}^\perp$. Tästä seuraa, että

$$\bar{w} - \bar{u} = \bar{u}^\perp - \bar{w}^\perp.$$

Toisaalta W ja $W^\perp$ ovat aliavaruuksia, joten $\bar{w} - \bar{u} \in W$ ja $\bar{u}^\perp - \bar{w}^\perp \in W^\perp$. Kuitenkin lauseen 23.17 nojalla $W \cap W^\perp = \{\bar{0}\}$, joten $\bar{w} - \bar{u} = \bar{0}$ ja $\bar{w}^\perp - \bar{u}^\perp = \bar{0}$. Tästä seuraa, että $\bar{w} = \bar{u}$ ja $\bar{w}^\perp = \bar{u}^\perp$. Siten ehdot toteuttavia vektoreita on vain yhdet. □



Kuva 23.30: Vektori $\bar{v}$ voidaan kirjoittaa summana vektoreista, jotka ovat aliavaruuksien W ja $W^{\perp}$ alkioita.

Todistetaan vielä lopuksi projektion avulla muutama hyödyllinen sisätuloon ja normiin liittyvä tulos. Esimerkiksi Schwarzin epäyhtälöä käytettiin jo luvussa 12.

Lause 23.25 (Schwarzin epäyhtälö)**.** *Olkoon V sisätuloavaruus. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in V$. Tällöin*

$$|\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle| \leq \|\bar{v}\| \|\bar{w}\|.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\bar{w} = \bar{0}$. Nyt $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$ ja $\|\bar{w}\| = 0$, joten väite pätee.

Oletetaan sitten, että $\bar{w} \neq \bar{0}$. Nyt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|\bar{v} - \text{proj}_w(\bar{v})\|^2 \\
&= \langle \bar{v} - \text{proj}_w(\bar{v}), \bar{v} - \text{proj}_w(\bar{v}) \rangle \\
&= \left\langle \bar{v} - \frac{\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle}{\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle} \bar{w},\ \bar{v} - \frac{\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle}{\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle} \bar{w} \right\rangle \\
&= \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle - \frac{\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle}{\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle} \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle - \frac{\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle}{\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle} \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle^2}{\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle^2} \langle \bar{w}, \bar{w} \rangle \\
&= \|\bar{v}\|^2 - 2\frac{\langle v, w \rangle^2}{\|\bar{w}\|^2} + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|\bar{w}\|^2} \\
&= \|\bar{v}\|^2 - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|\bar{w}\|^2}.
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle^2 \leq \|\bar{v}\|^2 \|\bar{w}\|^2.$$

Nyt voidaan päätellä, että $|\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle^2} \leq \sqrt{\|\bar{v}\|^2 \|\bar{w}\|^2} = \|\bar{v}\| \|\bar{w}\|.$ □

Lause 23.26 (Kolmioepäyhtälö)**.** *Olkoon V sisätuloavaruus. Tällöin*

$$\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$$

kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.

Todistus. Ensinnäkin huomataan, että

$$\begin{aligned}
\|\bar{v}+\bar{w}\|^2 &= \langle \bar{v}+\bar{w}, \bar{v}+\bar{w}\rangle \\
&= \langle \bar{v},\bar{v}\rangle + \langle \bar{v},\bar{w}\rangle + \langle \bar{w},\bar{v}\rangle + \langle \bar{w},\bar{w}\rangle \\
&= \|\bar{v}\|^2 + 2\langle \bar{v},\bar{w}\rangle + \|\bar{w}\|^2 \\
&\leq \|\bar{v}\|^2 + 2|\langle \bar{v},\bar{w}\rangle| + \|\bar{w}\|^2.
\end{aligned}$$

Nyt voidaan käyttää Schwarzin epäyhtälöä:

$$\begin{aligned}
\|\bar{v}\|^2 + 2|\langle \bar{v},\bar{w}\rangle| + \|\bar{w}\|^2 &\leq \|\bar{v}\|^2 + 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| + \|\bar{w}\|^2 \\
&= (\|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|)^2.
\end{aligned}$$

Näin saadaan $\|\bar{v}+\bar{w}\|^2 \leq (\|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|)^2$. Koska normit ovat positiivisia, tästä voidaan päätellä, että

$$\|\bar{v}+\bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|.$$

□

23.4 Ortogonaaliset ja ortonormaalit kannat

Luvussa 12.4 tutkittiin avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortogonaalisia ja ortonormaaleja kantoja. Monissa tilanteissa nämä kannat ovat kätevämpiä kuin muut kannat. Nyt yleistämme tulokset sisätuloavaruuksille sekä esittelemme joitakin uusia tuloksia.

Ensinnäkin ortogonaaliset jonot ovat vapaita.

Lause 23.27. *Oletetaan, että $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on sisätuloavaruuden V ortogonaalinen jono. Tällöin $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa.*

Todistus. Olkoot $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ sellaisia, että

$$c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Oletetaan, että $i \in \{1, \ldots, k\}$. Nyt

$$\langle \bar{v}_i, c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k\rangle = \langle \bar{v}_i, \bar{0}\rangle.$$

Yhtälön vasen puoli saadaan muotoon

$$c_1\langle \bar{v}_i, \bar{v}_1\rangle + \cdots + c_k\langle \bar{v}_i, \bar{v}_k\rangle = c_i\langle \bar{v}_i, \bar{v}_i\rangle,$$

sillä jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on ortogonaalinen. Toisaalta $\langle \bar{v}_i, \bar{0}\rangle = 0$ lemman 23.5 nojalla. Siis $c_i\langle \bar{v}_i, \bar{v}_i\rangle = 0$.

Koska ortogonaalisessa jonossa ei määritelmän mukaan ole nollavektoreita, ei $\bar{v}_i$ ole nollavektori. Näin ollen $\langle \bar{v}_i, \bar{v}_i\rangle \neq 0$, mistä seuraa, että $c_i = 0$. Siten $c_i = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$, ja jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. □

Ortonormaalin kannan suhteen vektorin koordinaatit on helppo määrittää.

Lause 23.28. *Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ on sisätuloavaruuden V ortonormaali kanta. Olkoon $\bar{v} \in V$. Tällöin*

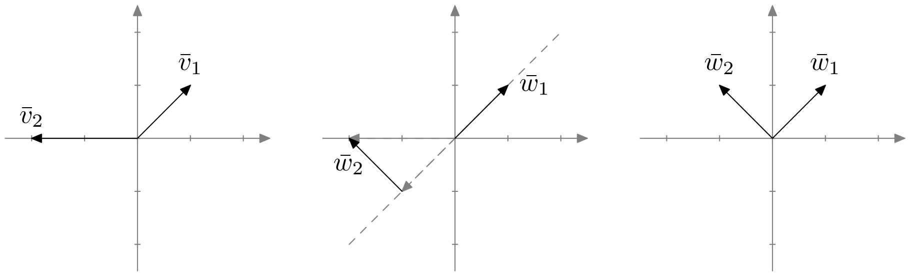
$$\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{u}_1 \rangle \bar{u}_1 + \langle \bar{v}, \bar{u}_2 \rangle \bar{u}_2 + \cdots + \langle \bar{v}, \bar{u}_n \rangle \bar{u}_n.$$

Toisin sanoen vektorin $\bar{v}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen saadaan sisätulon avulla.

Todistus. Lauseen todistus on samanlainen kuin lauseen 12.22 todistus. □

Ortonormaalin kannan etsiminen

Kohta esiteltävän Gramin–Schmidtin menetelmän avulla kannasta voidaan muokata ortogonaalinen ja edelleen ortonormaali. Luvussa 12.4 näytettiin, kuinka projektion (tai oikeammin kohtisuoran komplementin) avulla voidaan kahden vektorin muodostamasta kannasta muokata ortogonaalinen (ks. kuva 23.31). Nyt yleistämme tämän menetelmän mille tahansa äärelliselle kannalle.



Kuva 23.31: Ortogonaalisen kannan etsiminen kahden kantavektorin tapauksessa.

Esimerkki 23.29. Vektorit $\bar{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\bar{v}_2 = (-2, 0, 1)$ ja $\bar{v}_3 = (0, 1, 1)$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan. (Tämän osoittamiseksi riittää näyttää, että vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Se jätetään lukijalle.) Ryhdytään muodostamaan näistä kolmesta vektorista kantaa $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$, joka on ortogonaalinen tavallisen pistetulon suhteen.

Uuden kannan ensimmäiseksi vektoriksi voidaan ottaa mikä tahansa vektoreista $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$. Valitaan $\bar{w}_1 = \bar{v}_1$. Toiseksi vektoriksi valitaan vektorin $\bar{v}_2$ kohtisuora komponentti aliavaruutta $\operatorname{span}(\bar{w}_1)$ vastaan:

$$\bar{w}_2 = \operatorname{perp}_{\operatorname{span}(\bar{w}_1)}(\bar{v}_2) = \bar{v}_2 - \operatorname{proj}_{\operatorname{span}(\bar{w}_1)}(\bar{v}_2) = \bar{v}_2 - \frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\bar{w}_1 = (-1, 1, 1).$$

Nyt vektorit $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ ovat lemman 23.23 nojalla kohtisuorassa toisiaan vastaan. Lauseen 23.27 perusteella jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on vapaa, joten se muodostaa aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ ortogonaalisen kannan (ks. lause 17.14).

Kolmanneksi vektoriksi valitaan vektorin $\bar{v}_3$ kohtisuora komponentti aliavaruutta $\operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ vastaan:

$$
\begin{aligned}
\bar{w}_3 &= \operatorname{perp}_{\operatorname{span}(\bar{w}_1,\bar{w}_2)}(\bar{v}_3) \\
&= \bar{v}_3 - \operatorname{proj}_{\operatorname{span}(\bar{w}_1,\bar{w}_2)}(\bar{v}_3) \\
&= \bar{v}_3 - \frac{\bar{v}_3 \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\bar{w}_1 - \frac{\bar{v}_3 \cdot \bar{w}_2}{\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_2}\bar{w}_2 \\
&= \frac{1}{6}(1,-1,2).
\end{aligned}
$$

Huomaa, että projektion laskemiseen tarvitaan tietoa siitä, että $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ ortogonaalinen kanta. Vektori $\bar{w}_3$ on kohtisuorassa vektoreita $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ vastaan lemman 23.23 perusteella. Siten jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ on ortogonaalinen.

Lauseen 23.27 nojalla jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ on vapaa. Koska avaruuden $\mathbb{R}^3$ dimensio on kolme, on jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ avaruuden kanta. Näin saatiin siis aikaan ortogonaalinen kanta.

Lause 23.30 (Gramin–Schmidtin menetelmä)**.** *Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ on sisätuloavaruuden V kanta. Tällöin avaruudella V on ortogonaalinen kanta $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n)$, joka saadaan seuraavasti:*

$$
\begin{aligned}
\bar{w}_1 &= \bar{v}_1 \\
\bar{w}_2 &= \operatorname{perp}_{\operatorname{span}(\bar{w}_1)}(\bar{v}_2) \\
\bar{w}_3 &= \operatorname{perp}_{\operatorname{span}(\bar{w}_1,\bar{w}_2)}(\bar{v}_3) \\
&\vdots \\
\bar{w}_n &= \operatorname{perp}_{\operatorname{span}(\bar{w}_1,\ldots,\bar{w}_{n-1})}(\bar{v}_n).
\end{aligned}
$$

Tästä ortogonaalisesta kannasta saadaan ortonormaali kanta $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n)$ asettamalla

$$
\bar{u}_i = \frac{1}{\|\bar{w}_i\|}\bar{w}_i
$$

kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Jos kantavektorit kirjoitetaan auki, nähdään, että

$$
\begin{aligned}
\bar{w}_1 &= \bar{v}_1 \\
\bar{w}_2 &= \bar{v}_2 - \frac{\langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle}\bar{w}_1 \\
\bar{w}_3 &= \bar{v}_3 - \frac{\langle \bar{v}_3, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle}\bar{w}_1 - \frac{\langle \bar{v}_3, \bar{w}_2 \rangle}{\langle \bar{w}_2, \bar{w}_2 \rangle}\bar{w}_2 \\
&\vdots \\
\bar{w}_n &= \bar{v}_2 - \frac{\langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle}\bar{w}_{n-1} - \frac{\langle \bar{v}_2, \bar{w}_2 \rangle}{\langle \bar{w}_2, \bar{w}_2 \rangle}\bar{w}_{n-1} - \cdots - \frac{\langle \bar{v}_n, \bar{w}_{n-1} \rangle}{\langle \bar{w}_{n-1}, \bar{w}_{n-1} \rangle}\bar{w}_{n-1}\bar{w}_1.
\end{aligned}
$$

Todistus. Aloitetaan osoittamalla, että jono $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)$ on ortogonaalinen. Koska $\bar{w}_2$ on vektorin $\bar{v}_2$ kohtisuora komponentti aliavaruutta $\text{span}(\bar{w}_1)$ vastaan, vektorit $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ ovat ortogonaaliset lemman 23.23 nojalla. Samalla tavalla $\bar{w}_3$ on vektorin $\bar{v}_3$ kohtisuora komponentti aliavaruutta $\text{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ vastaan, joten vektorit $\bar{w}_3$ ja $\bar{w}_2$ sekä $\bar{w}_3$ ja $\bar{w}_1$ ovat ortogonaaliset. Jatkaen samaan tapaan nähdään, että kaikki vektorit $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

On vielä osoitettava, että mikään vektoreista ei ole nollavektori. Oletetaan vastoin väitettä, että $\bar{w}_i = \bar{0}$ jollakin $i \in \{1, \dots, n\}$. Nyt

$$\bar{v}_i = \bar{w}_i + \text{proj}_{\text{span}(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{i-1})}(\bar{v}_i) = \text{proj}_{\text{span}(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{i-1})}(\bar{v}_i) \in \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}).$$

Lauseen 16.5 perusteella tästä seuraa, että jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_i)$ on sidottu. Tämä on ristiriita, sillä $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ on kanta ja siksi vapaa, eikä vapaan jonon osajono voi olla sidottu (ks. lause 16.7). Siten vastaoletus on väärä. Näin ollen $\bar{w}_i \neq \bar{0}$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$. Siis jono $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)$ on ortogonaalinen.

Lauseen 23.27 nojalla jono $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)$ on vapaa ja lisäksi sen pituus on sama kuin avaruuden V dimensio. Lauseen 17.14 nojalla se on avaruuden V kanta.

Skalaarilla kertominen ei vaikuta vektorien ortogonaalisuuteen, joten myös jono $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ on ortogonaalinen. Lisäksi sen jokaisen vektorin normi on yksi, joten jono on ortonormaali. □

Lauseesta seuraa, että jokaisella äärellisulotteisella vektoriavaruudella on ortogonaalinen kanta.

Esimerkki 23.31. Etsitään avaruudelle $\mathbb{R}^3$ ortogonaalinen kanta, jonka yksi vektori on $\bar{w}_1 = (1, 2, 3)$. Valitaan aluksi vaikkapa $\bar{v}_2 = (0, 1, 0)$ ja $\bar{v}_3 = (0, 0, 1)$. Tällöin jono $(\bar{w}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Tämän osoittamiseen riittää lauseen 17.14 perusteella näyttää, että jono on vapaa tai että se virittää avaruuden $\mathbb{R}^3$. Tämä jätetään lukijalle.

Ortogonalisoidaan kanta $(\bar{w}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Valitaan toiseksi kantavektoriksi

$$\bar{w}_2' = \bar{v}_2 - \frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\bar{w}_1 = \bar{v}_2 - \frac{2}{14}\bar{w}_1 = (-1/7, 5/7, -3/7).$$

Tässä vaiheessa vektoria $\bar{w}_2'$ kannattaa vielä kertoa skalaarilla 7, jotta päästään eroon ikävistä murtoluvuista. Valitaankin kantavektoriksi siis

$$\bar{w}_2 = 7\bar{w}_2' = (-1, 5, -3).$$

Kolmas kantavektorikandidaatti on

$$\begin{aligned} \bar{w}_3' &= \bar{v}_3 - \frac{\bar{v}_3 \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\bar{w}_1 - \frac{\bar{v}_3 \cdot \bar{w}_2}{\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_2}\bar{w}_2 \\ &= \bar{v}_3 - \frac{3}{14}\bar{w}_1 - \frac{-3}{35}\bar{w}_2 = (-3/10,\ 0,\ 1/10) \end{aligned}$$

Vaihdetaan vielä tämänkin vektorin tilalle siistimpi skalaarimonikerta

$$\bar{w}_3 = 10\bar{w}_3' = (-3, 0, 1).$$

Tällöin $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortogonaalinen kanta.

Tässä esimerkissä ikävät kantavektorit merkittiin kaukonäköisesti pilkulla, jotta haluttuja kantavektoreita voitiin merkitä symbolilla w. Käytännössä ei tietenkään voi etukäteen tietää, onko vektoriin tulossa murtolukuja vai ei, joten pilkkuja voi halutessaan lisätä vektoreiden nimiin jälkikäteen.

Lause 23.32. *Oletetaan, että V on äärellisulotteinen sisätuloavaruus ja W sen aliavaruus. Tällöin*

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V).$$

Todistus. Oletetaan, että $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W ortogonaalinen kanta ja että $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_l)$ on aliavaruuden $W^\perp$ ortogonaalinen kanta. Tällaiset kannat ovat olemassa lauseen 23.30 nojalla. Osoitetaan, että $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_l)$ on avaruuden V kanta, mikä todistaa väitteen.

Havaitaan, että $\langle \bar{w}_i, \bar{v}_j \rangle = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$ ja $j \in \{1, \ldots, l\}$, sillä $\bar{w}_i \in W$ ja $\bar{v}_j \in W^\perp$. Lisäksi kummassakin jonossa jonon vekorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Näin jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_l)$ on ortogonaalinen ja siten vapaa lauseen 23.27 nojalla.

Oletetaan, että $\bar{u} \in V$. Lauseen 23.24 mukaan on olemassa yksi sellainen vektori $\bar{w} \in W$ ja yksi sellainen vektori $\bar{w}^\perp \in W^\perp$, että $\bar{u} = \bar{w} + \bar{w}^\perp$. Vektori $\bar{w} \in W$ voidaan kirjoittaa kantavektorien $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ lineaarikombinaationa ja vektori $\bar{w}^\perp \in W^\perp$ kantavektorien $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_l)$ lineaarikombinaationa, joten vektori $\bar{u}$ voidaan kirjoittaa jonon $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_l)$ vektorien lineaarikombinaationa. Siis $\operatorname{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_l) = V$.

On näytetty, että $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_l)$ on avaruuden V kanta. Siis

$$\dim(V) = k + l = \dim(W) + \dim(W^\perp).$$

$\square$