Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

30.10.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorien laskusäännöt

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja a, $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$

(b) $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

(c) $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$

(d) $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$

(e) $c(\bar{v} + \bar{w}) = c\bar{v} + c\bar{w}$

(f) $(a + c)\bar{v} = a\bar{v} + c\bar{v}$

(g) $a(c\bar{v}) = (ac)\bar{v}$

(h) $1\bar{v} = \bar{v}$

Seuraavaksi yleistetään avaruuden ja vektorin käsitteitä.

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2. $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3. On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0}$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4. Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v}$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Esimerkki

Avaruus $\mathbb{R}^n$ on vektoriavaruus.

Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on vektoriavaruus, kun yhteenlaskuna on reaalilukujen yhteenlasku ja skalaarikertolaskuna reaalilukujen kertolasku.

Esimerkki

Yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun täytyy olla määriteltyja joukossa V: jos $\bar{v}$, $\bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin täytyy päteä $\bar{v} + \bar{w} \in V$ ja $a\bar{v} \in V$.

Esimerikiksi kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla ja skalaarikertolaskulla ei ole vektoriavaruus.

Matriisiavaruudet

Vektoriavaruuden määritelmä ei kerro, mitä otuksia vektoriavaruuden alkiot ovat.

Kaikkien $m \times n$-matriisien joukko $\mathbb{R}^{m \times n}$ on vektoriavaruus. Matriiseja voidaan laskea yhteen ja niitä voidaan kertoa reaaliluvuilla. Lisäksi seuraavat säännöt pätevät $m \times n$-matriiseille A, B ja C sekä reaaliluvuille a ja b:

(a) $A + B = B + A$
(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$
(c) $A + O = A$
(d) $A + (-A) = O$
(e) $a(A + B) = aA + aB$
(f) $(a + b)A = aA + bA$
(g) $(ab)A = a(bA)$
(h) $1A = A$.

Polynomiavaruus

Vektoriavaruuden alkiot voivat olla polynomeja. Reaalikertoiminen *polynomi* on muotoa

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

oleva summa, missä $n \in \mathbb{N}$ ja $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$.

Esimerkiksi $-2x^5 - x^3 + 5x^2 + 4x$ on polynomi.

Polynomiavaruus

Lasketaan polynomien

$$p = 3x^2 - 4x + 10 \qquad \text{ja} \qquad q = -2x^5 - x^3 + 5x^2 + 4x$$

summa.

Lasketaan skalaarimonikerta $(-3)p$.

Polynomiavaruus

Reaalikertoimiset polynomit muodostavat vektoriavaruuden.
Tätä vektoriavaruutta merkitään symbolilla $\mathcal{P}$.

Funktioavaruus

Vektoriavaruuden alkiot voivat olla kuvauksia. Olkoon $\mathcal{F}$ kaikkien kuvausten $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko. Jos $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{F}$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin kuvaukset $f + g$ ja af määritellään seuraavasti:

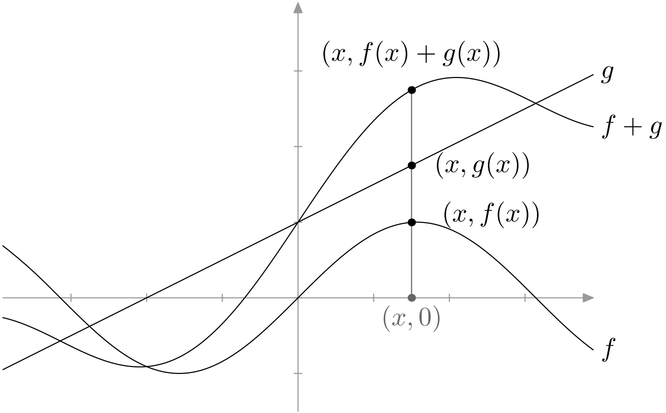
$$\begin{aligned} f + g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad & x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{ja} \\ af \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad & x \mapsto af(x). \end{aligned}$$

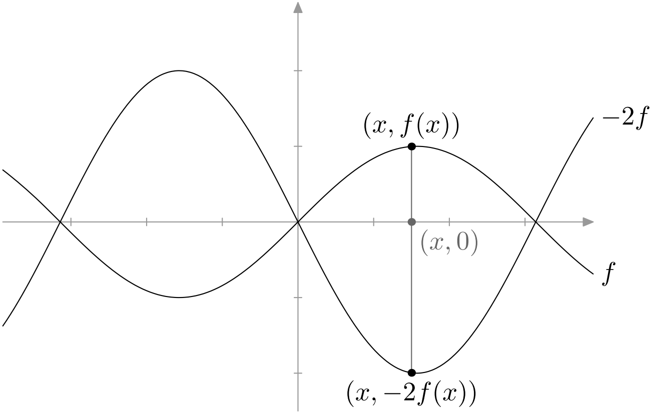
Funktioavaruus

Tutkitaan funktioita

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x \quad \text{ja} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 0{,}5x + 1.$$

Määritetään funktiot $f + g$ ja $(-2)f$.


$(x, f(x) + g(x))$
g
$f + g$
$(x, g(x))$
$(x, f(x))$
$(x, 0)$
f


$-2f$
$(x, f(x))$
$(x, 0)$
f
$(x, -2f(x))$

Tehtävä

Merkitään

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 4x^3 - \sqrt[3]{x}$$

ja

$$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ k(x) = -x^3 + 2x + 1.$$

Määritä funktiot $h + k$ ja $4k$.

Funktioavaruus

Kun yhteenlasku ja skalaarikertolasku on määritellään edellä kuvatulla tavalla, on $\mathcal{F}$ vektoriavaruus.

Mikä kuvaus on avaruuden $\mathcal{F}$ nollavektori? Mikä on kuvauksen $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 4x^3 - \sqrt[3]{x}$ vastavektori?

Esimerkki

Määritellään joukossa $\mathbb{R}^2$ skalaarikertolasku $*$ seuraavasti: jos $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin

$$a * (v_1, v_2) = (av_1, 0).$$

Määritä vektorit $3 * (4, -1)$ ja $(-4) * (0, 2)$.

Onko joukko $\mathbb{R}^2$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla $+$ ja skalaarikertolaskulla $*$ vektoriavaruus?

Esimerkki

Määritellään joukossa

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ seuraavasti: jos x, $y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c.$$

Tällöin $\mathbb{R}_+$ on vektoriavaruus.

Tiivistelmä

Tietyt laskusäännöt pätevät muun muassa

- avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille
- matriiseille
- polynomeille
- funktioille.

Kyseiset laskusäännöt toteuttavaa rakennetta kutsutaan vektoriavaruudeksi ja sen alkioita vektoreiksi. Matematiikassa asiat halutaan tehdä mahdollisimman yleisesti!

Lause

Oletetaan, että V on vektoriavaruus. Tällöin

(a) nollavektoreita on täsmälleen yksi

(b) jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on täsmälleen yksi vastavektori.

Lause

Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v} \in V$, $a \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $0\bar{v} = \bar{0}$

(b) $a\bar{0} = \bar{0}$

(c) $(-1)\bar{v} = -\bar{v}$

(d) jos $a\bar{v} = \bar{0}$, niin $a = 0$ tai $\bar{v} = \bar{0}$.

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Sen osajoukko W on vektoriavaruuden V *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

(b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

(c) $\bar{0} \in W$.

Esimerkki

Osoitetaan, että joukko

$$W = \{(a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.