Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

28.11.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Kertausta: sisätulo yleistää pistetulon

Sisätulon määritelmä:

Kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$ pätee

(a) $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle$

(b) $\langle \bar{v} + \bar{w}, \bar{u} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle + \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle$

(c) $\langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = c\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$

(d) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$; $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$, jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$.

Kertausta: normi eli pituus

Määritelmä

Olkoon V sisätuloavaruus. Tällöin vektorin $\bar{v} \in V$ *normi* on

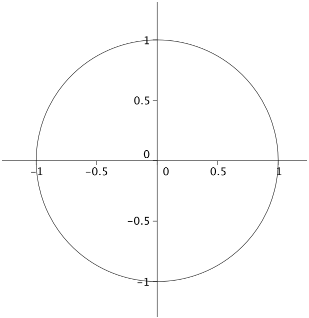
$$\| \bar{v} \| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle}.$$

Yksikköympyrä

Sisätuloavaruuden *yksikköympyrä* koostuu kaikista niistä vektoreista, joiden normi eli pituus on yksi.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ ja pistetulon tapauksessa yksikköympyrä on joukko

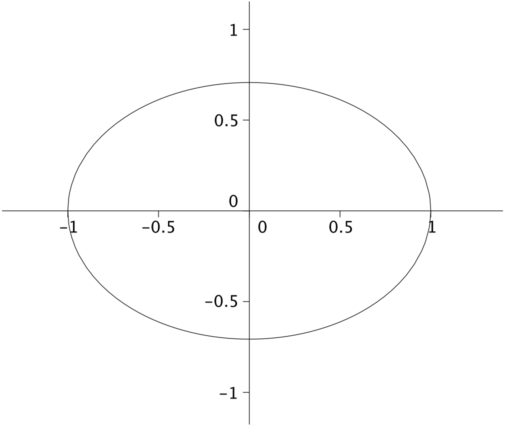
$$\begin{aligned}\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\,\bar{x}\,\| = 1\} &= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.\end{aligned}$$



Yksikköympyrä

Määritellään avaruuden $\mathbb{R}^2$ sisätulo kaavalla
$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1 w_1 + 2 v_2 w_2$.
Tällöin yksikköympyrä on joukko

$$\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \| \bar{x} \| = 1\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_2^2 = 1\}.$$



Normiin liittyviä tuloksia

Lause

Oletetaan, että V on sisätuloavaruus, $\bar{v} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $\| \bar{v} \| \geq 0$

(b) $\| \bar{v} \| = 0$, jos ja vain jos $\bar{v} = 0$

(c) $\| c\bar{v} \| = c\| \bar{v} \|$

Ortogonaalisuus

Määritelmä

Olkoon V sisätuloavaruus. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in V$. Tällöin vektorit $\bar{v} \in V$ ja $\bar{w} \in V$ ovat *ortogonaaliset* eli *kohtisuorassa toisiaan vastaan*, jos

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0.$$

Kohtisuora komplementti

Aliavaruuden kohtisuora komplementti koostuu niistä vektoreista, jotka ovat kohtisuorassa kaikkia aliavaruuden vektoreita vastaan.

Määritelmä

Olkoon W sisätuloavaruuden V aliavaruus. Sen *kohtisuora komplementti* on joukko

$$W^{\perp} = \{\bar{v} \in V \mid \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0 \text{ kaikilla } \bar{w} \in W\}.$$

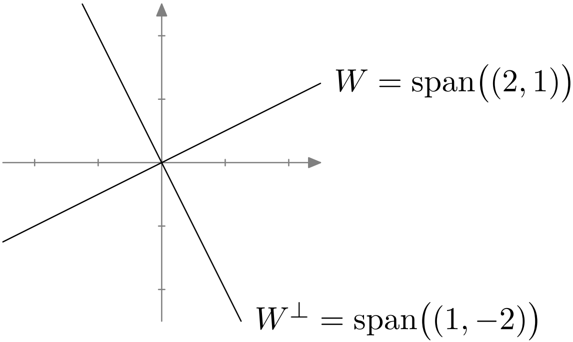
Esimerkki

Mikä on avaruuden $\mathbb{R}^2$ suoran

$$W = \operatorname{span}\big((2,1)\big) = \{t(2,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

kohtisuora komplementti $W^{\perp}$?

Esimerkki jatkuu



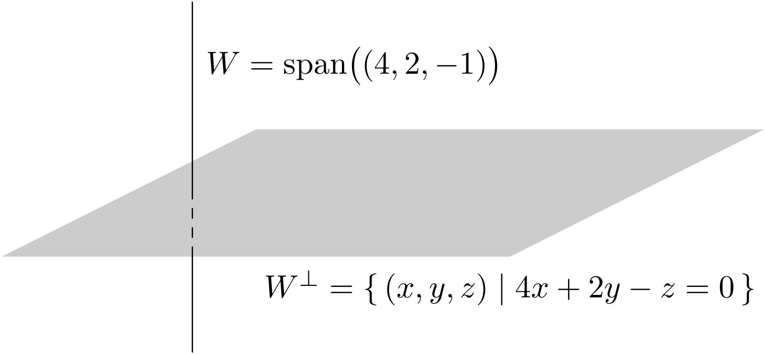
Esimerkki

Mikä on avaruuden $\mathbb{R}^3$ suoran

$$W = \operatorname{span}\big((4, 2, -1)\big)$$

kohtisuora komplementti $W^{\perp}$?

Esimerkki jatkuu



Kohtisuora komplementti on aliavaruus

Lause

Olkoon W sisätuloavaruuden V aliavaruus. Sen kohtisuora komplementti $W^\perp$ on myös V:n aliavaruus.