Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

20.11.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Kokeenkatsomistilaisuus järjestetään ke 21.11. klo 12–14 salissa B120.
- Jos et pääse paikalle, voit sopia kokeen katsomisesta erikseen.

Kurssin rakenteesta

- Oppimisen perustana ovat tehtävät. Jos ei tee niitä, on todella vaikea pärjätä kokeessa.
- Tehtävät on tarkoitus tehdä luentomateriaalin avulla. Ohjaajat auttavat tässä.
- Luentomateriaalin lukemisessa auttavat luennot. Luennoilla myös pyritään antamaan kokonaiskuva kurssin asioista.

Määritelmä

Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin A *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen vektori $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, että $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

Vektoria $\bar{v}$, joka toteuttaa yllä mainitun ehdon kutsutaan ominaisarvoon λ liittyväksi *ominaisvektoriksi*.

Esimerkki

Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

on ominaisarvo 4, jota vastaava ominaisvektori on $(1, 1)$.

Myös $(2, 2)$ on ominaisarvoa 4 vastaava ominaisvektori.

Ominaisvektoreita on äärettömän monta!

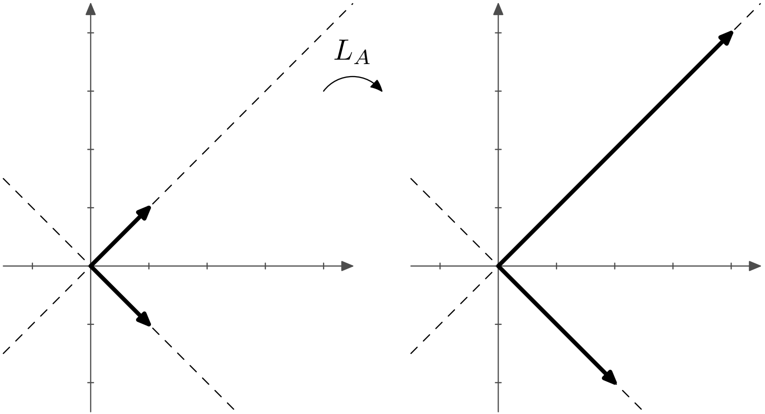
Esimerkki

Myös luku 2 on matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

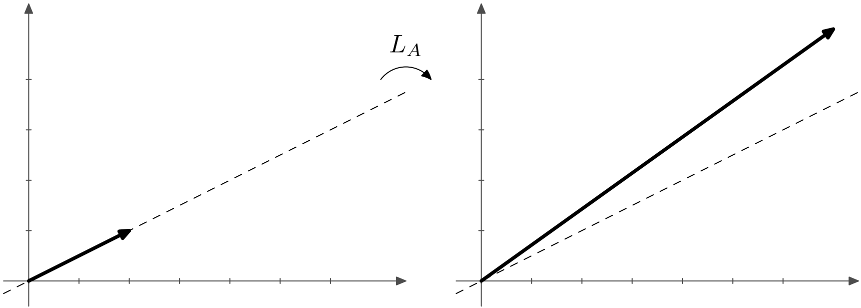
ominaisarvo. Sitä vastaava ominaisvektori on $(1, -1)$.

Ominaisarvoja voi siis olla monta.



Vektorit $(1,1)$ ja $(1,-1)$ ovat matriisin A ominaisvektoreita.

Vektori $(2, 1)$ ei ole matriisin A ominaisvektori.



Ominaisavaruus

Kerätään kaikki matriisin A ominaisarvoa λ vastaavat vektorit (sekä nollavektori) yhteen.

Määritelmä

Oletetaan, että matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$. Ominaisarvoa λ vastaava *ominaisavaruus* on joukko

$$V_\lambda = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{v} = \lambda\bar{v}.\}$$

Esimerkki

Määritetään matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ominaisarvoa 4 vastaava ominaisavaruus V_4 eli kaikki ominaisarvoa 4 vastaavat ominaisvektorit.

Ominaisavaruudet ovat aliavaruuksia

Lause

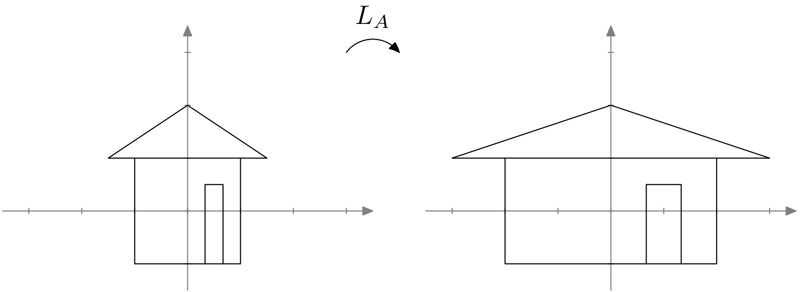
Matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ominaisarvoa λ vastaava ominaisavaruus V_λ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Venytyskuvauksen ominaisarvot

Tutkitaan matriisin

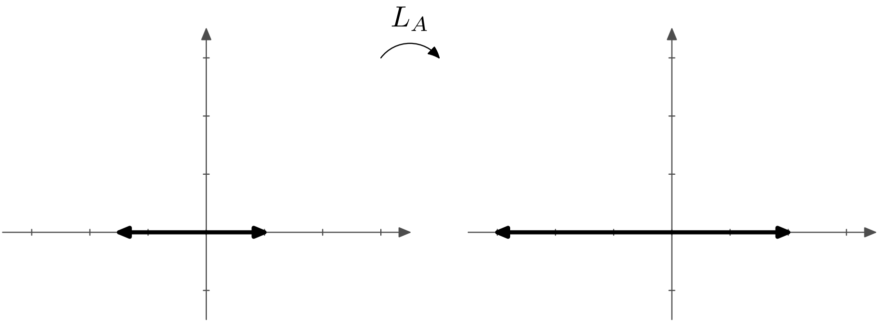
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

määräämää lineaarikuvausta L_A.



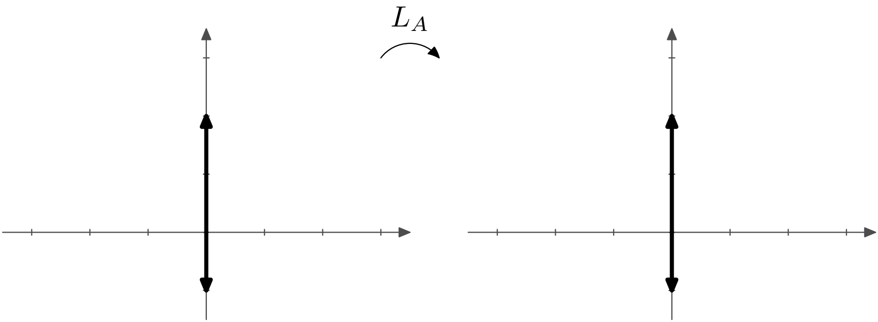
Mitkä ovat matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit?

Venytyskuvauksen ominaisarvot



Vaaka-akselin suuntaiset vektorit ovat matriisin A ominaisvektoreita. Niitä vastaa ominaisarvo 2.

Venytyskuvauksen ominaisarvot



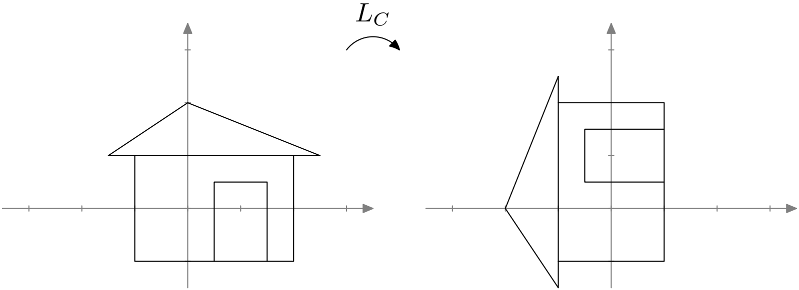
Myös pystyakselin suuntaiset vektorit ovat matriisin A ominaisvektoreita. Niitä vastaa ominaisarvo 1.

Kiertokuvauksen ominaisarvot

Tutkitaan matriisin

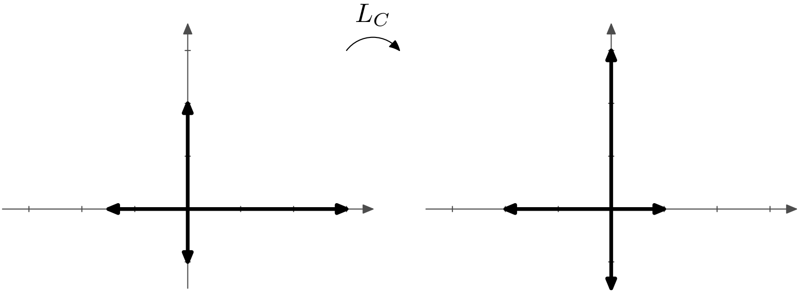
$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

määräämää lineaarikuvausta L_C.



Mitkä ovat matriisin C ominaisarvot ja ominaisvektorit?

Kiertokuvauksen ominaisarvot



Matriisilla C kertominen muuttaa vektoreiden suuntaa 90°.
Ominaisarvoja tai -vektoreita ei siis ole.

Peilauksen ominaisarvot

Tutkitaan matriisin

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

määräämää lineaarikuvausta L_D.
Kuvaus peilaa vektorit suoran $\mathrm{span}((1,1))$ suhteen. Mitkä ovat matriisin D ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit?

Miten ominaisarvot löydetään?

Lause

Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Reaaliluku λ on matriisin A ominaisarvo, jos ja vain jos $\det(A - \lambda I) = 0$.

Muuttujan λ polynomi, joka saadaan kirjoittamalla auki determinantti $\det(A - \lambda I)$, on nimeltään matriisin A *karakteristinen poynomi*.

Esimerkki

Määritetään matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot.

Yläraja ominaisarvojen määrälle

Lause

Jos A on $n \times n$-matriisi, sillä on korkeintaan n ominaisarvoa.