Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

5.12.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Kurssikoe

- Koe järjestetään ke 12.12. klo 13–16. Laskin saa olla mukana, mutta taulukkokirja ei.
- Jos et pääse osallistumaan kokeeseen jostakin painavasta syystä, kerro luennoitsijalle heti.
- Koeviikolla ohjausta on tarjolla maanantaina ja tiistaina.
- Kukka ei ole tae täydellisestä vastauksesta. Katso myös ratkaisuehdotukset. Ja muista, että myös tähdettömiä tehtäviä voidaa kysyä kokeessa.
- Koealue on koko kurssimateriaali (ei kalvot). Tehtävät pitää myös hallita.

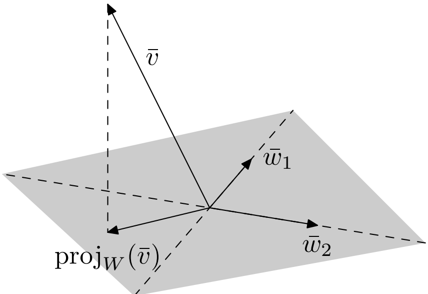
Projektio

Oletetaan, että W on sisätuloavaruuden V aliavaruus, jolla on ortogonaalinen kanta $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$.

Määritelmä

Vektorin $\bar{v} \in V$ *kohtisuora projektio aliavaruudelle* W on

$$\mathrm{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle}\bar{w}_1 + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_2 \rangle}{\langle \bar{w}_2, \bar{w}_2 \rangle}\bar{w}_2 + \cdots + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_k \rangle}{\langle \bar{w}_k, \bar{w}_k \rangle}\bar{w}_k.$$

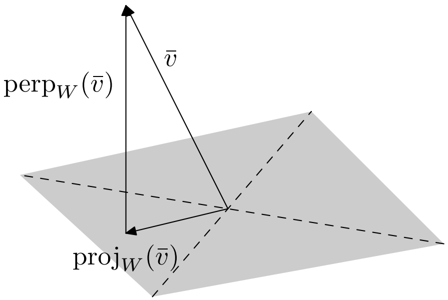


Kohtisuora komponentti

Määritelmä

Oletetaan, että W on sisätuloavaruuden V aliavaruus, jolla on ortogonaalinen kanta. Vektorin $\bar{v} \in V$ *kohtisuora komponentti aliavaruutta W vastaan* on

$$\mathrm{perp}_W(\bar{v}) = \bar{v} - \mathrm{proj}_W(\bar{v}).$$



Ortogonaaliset ja ortonormaalit jonot

- Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *ortogonaalinen*, jos sen vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eikä mikään vektoreista ole nollavektori.
- Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *ortonormaali*, jos se on ortogonaalinen ja jokaisen vektorin pituus on yksi.

Ortogonaalisen kannan etsiminen

- Ortogonaalinen kanta löydetään kohtisuorien komponenttien avulla.
- Ortogonaalisesta kannasta voi muodostaa ortonormaalin skaalaamalla vektorien pituudet.

Miksi ortonormaalit kannat ovat mukavia?

Ortonormaalin kannan suhteen vektorin koordinaatit on helppo määrittää.

Lause

Oletetaan, että $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ on sisätuloavaruuden V ortonormaali kanta. Olkoon $\bar{v} \in V$. Tällöin

$$\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{u}_1 \rangle \bar{u}_1 + \langle \bar{v}, \bar{u}_2 \rangle \bar{u}_2 + \cdots + \langle \bar{v}, \bar{u}_n \rangle \bar{u}_n.$$

ESIMERKKI MATRIISIEN JA OMINAISARVOJEN SOVELTAMISESTA

Erään koppakuoriaislajin naaraat elävät korkeintaa 3-vuotiaiksi. Jaetaan naarasyksilöt kolmeen ikäluokkaan: lapset (0–1-vuotiaat), nuoret (1–2-vuotiaat) ja aikuiset (2–3-vuotiaat).

Lisääntyminen:

- lapset: eivät lisäänny
- nuoret: 4 naaraspuolista jälkeläistä
- aikuiset: 3 naaraspuolista jälkeläistä

Selviytymistodennäköisyydet:

- lapset: 50%
- nuoret: 25%

Tilanne vuoden päästä

Alkutilanne: 40 lasta, 40 nuorta ja 20 aikuista

Vuoden päästä:

- lapsia: $40 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 220$
- nuoria: $40 \cdot 0,5 = 20$
- aikuisia: $40 \cdot 0,25 = 10$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Kahden vuoden päästä:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 110 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Kolmen vuoden päästä:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 110 \\ 110 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 455 \\ 55 \\ 27,5 \end{bmatrix}$$

Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix}$$

on ominaisarvo 1,5, jota vastaa ominaisavaruus $\text{span}((18, 6, 1))$. Mitä se tarkoittaa?

Kun kuoriaisten määrät ovat suhteessa 18 : 6 : 1, suhde ei muutu seuraavina vuonna. On saavutettu tasapainotila. Kasvunopeus on tällöin 1,5.