Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

4.12.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Sekalaisia asioita

- Koe järjestetään ke 12.12. klo 13–16. Laskin saa olla mukana, mutta taulukkokirja ei.
- Jos et pääse osallistumaan kokeeseen jostakin painavasta syystä, kerro luennoitsijalle heti.
- Koeviikolla ohjausta on tarjolla maanantaina ja tiistaina.
- Osasitte funktioiden sisätuloon liittyvän tehtävän todella hyvin!
- Ratkaise tehtäviä ja avaa joulukalenterin luukkuja. Linkki löytyy kurssisivulta.
- Matematiikan yö järjestetään Tiedekeskus Heurekassa ke 5.12. klo 15–24. Tapahtumaan on vapaa pääsy. Lisätietoa: www.heureka.fi

Eräs kurssipalaute

Voisivatko tarkistajat kirjoittaa selkeämpiä kommentteja tehtäviin?

Vastaus: Haluaisimme antaa teille enemmän palautetta kuin pelkkiä alleviivauksia, mutta aika ei yksinkertaisesti riitä. (Opiskelijoita on 300 ja tarkistajia 6.) Tarkemmat neuvot korjaukseen saa tarvittaessa suullisesti ohjaajilta tai luennoitsijalta. Paperiin laitettu kommentti ”Kysy neuvoa ohjaajilta” tarkoittaa yleensä sitä, että korjaus on niin monimutkainen, ettei sitä ole tarkoituksenmukaista selittää kirjallisesti.

Selitä omin sanoin seuraava tulos:

Olkoon $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Oletetaan, että $V = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Tällöin

$$\operatorname{Im} L = \operatorname{span}(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_k)).$$

Selitä omin sanoin seuraava tulos:

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus ja W on avaruuden V aliavaruus. Tällöin $LW = \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\}$ on avaruuden U aliavaruus.

"Lineaarikuvauksessa aliavaruuden kuva on aliavaruus."

Selitä omin sanoin seuraava tulos:

Olkoon $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Oletetaan, että $V = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Tällöin

$$\operatorname{Im} L = \operatorname{span}(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_k)).$$

"Lähtöavaruuden virittäjävektoreiden kuvavektorit virittävät lineaarikuvauksen kuvan."

Selitä omin sanoin seuraava tulos:

Lause

Oletetaan, että W on sisätuloavaruuden V aliavaruus. Oletetaan lisäksi, että $W = \mathrm{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ ja $\bar{v} \in V$. Jos $\langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$, niin $\bar{v} \in W^{\perp}$.

"Jos vektori on kohtisuorassa aliavaruuden virittäjävektoreita vastaan, se on kohtisuorassa kaikkia aliavaruuden vektoreita vastaan."

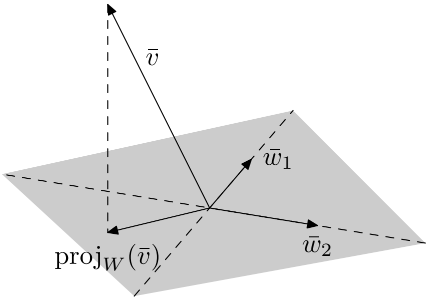
Ortogonaaliset ja ortonormaalit jonot

Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *ortogonaalinen*, jos sen vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eikä mikään vektoreista ole nollavektori.

Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *ortonormaali*, jos se on ortogonaalinen ja jokaisen vektorin pituus on yksi.

Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^3$ jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ on ortonormaali, kun sisätulona pistetulo.

Projektio



Projektio

Oletetaan, että W on sisätuloavaruuden V aliavaruus, jolla on ortogonaalinen kanta $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$.

Määritelmä

Vektorin $\bar{v} \in V$ *kohtisuora projektio aliavaruudelle* W on

$$\mathrm{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle} \bar{w}_1 + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_2 \rangle}{\langle \bar{w}_2, \bar{w}_2 \rangle} \bar{w}_2 + \cdots + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_k \rangle}{\langle \bar{w}_k, \bar{w}_k \rangle} \bar{w}_k.$$

Esimerkki

Määritetään vektorin $\bar{v} = (3, 2, 1)$ projektio aliavaruudelle $W = \operatorname{span}\big(\bar{e}_1, \bar{e}_2\big)$, missä $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$.

Projisoinnissa on käytettävä ortogonaalista kantaa

Edellisen esimerkin aliavaruudella on myös kanta $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, missä $\bar{u}_1 = (1, 1, 0)$ ja $\bar{u}_2 = (0, 1, 0))$. Nyt

$$\mathrm{proj}_{\bar{u}_1}(\bar{v}) = \frac{5}{2}\bar{u}_1$$

ja

$$\mathrm{proj}_{\bar{u}_2}(\bar{v}) = \frac{2}{1}\bar{u}_2 = 2\bar{u}_2.$$

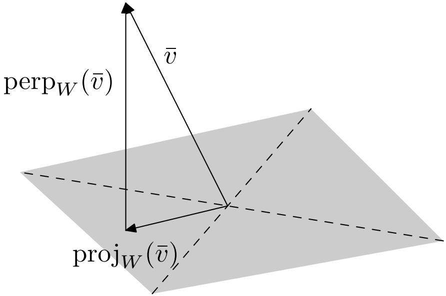
Näiden projektiovektoreiden summa on $(5/2, 9/2, 0)$.

Tulee aivan erilainen tulos kuin äsken! Kanta $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ ei nimittäin ole ortogonaalinen.

Määritelmä

Oletetaan, että W on sisätuloavaruuden V aliavaruus, jolla on ortogonaalinen kanta. Vektorin $\bar{v} \in V$ *kohtisuora komponentti aliavaruutta W vastaan* on

$$\mathrm{perp}_W(\bar{v}) = \bar{v} - \mathrm{proj}_W(\bar{v}).$$



Kohtisuora komponentti on kohtisuorassa

Vektorin $\bar{v}$ kohtisuora komponentti $\mathrm{perp}_W(\bar{v})$ on kohtisuorassa aliavaruutta W vastaan.

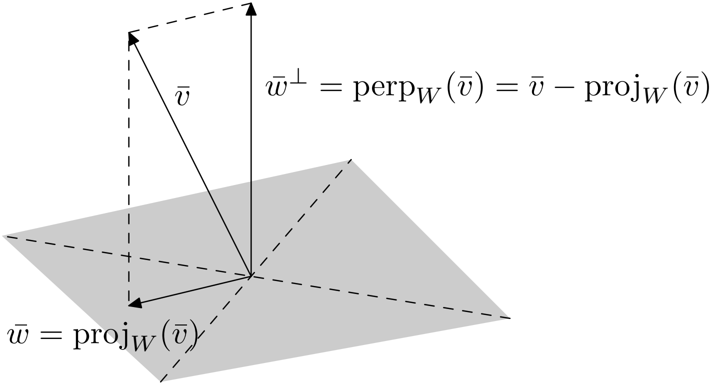
Lause

Oletetaan, että W on sisätuloavaruuden V aliavaruus ja $\bar{v} \in V$. Tällöin $\mathrm{perp}_W(\bar{v}) \in W^{\perp}$.

Lause

Oletetaan, että W on sisätuloavaruuden V aliavaruus ja $v \in V$. Tällöin on olemassa täsmälleen yhdet vektorit $\bar{w} \in W$ ja $\bar{w}^{\perp} \in W^{\perp}$, joille pätee

$$\bar{v} = \bar{w} + \bar{w}^{\perp}.$$



Ortogonaalisen kannan etsiminen

Vektorit $\bar{v}_1 = (1,1,0)$, $\bar{v}_2 = (-2,0,1)$ ja $\bar{v}_3 = (0,1,1)$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan. Muodostetaan näistä vektoreista kanta $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$, joka on ortogonaalinen.

- Valitaan $\bar{w}_1 = \bar{v}_1$.
- Valitaan
$$\bar{w}_2 = \mathrm{perp}_{\mathsf{span}(\bar{w}_1)}(\bar{v}_2) = (-1,1,1).$$
Nyt vektorit $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
- Valitaan
$$\bar{w}_3 = \mathrm{perp}_{\mathsf{span}(\bar{w}_1,\bar{w}_2)}(\bar{v}_3) = \frac{1}{6}(1,-1,2).$$
Vektori $\bar{w}_3$ on kohtisuorassa vektoreita $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ vastaan

Jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ on ortogonaalinen. Lisäksi se on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta.

Ortonormaalin kannan etsiminen

Ortogonaalisesta kannasta saa ortonormaalin skaalamalla vektorit:

$$\frac{1}{\| \bar{w}_1 \|}\bar{w}_1, \quad \frac{1}{\| \bar{w}_2 \|}\bar{w}_2, \quad \frac{1}{\| \bar{w}_2 \|}\bar{w}_2$$

Miksi ortonormaalit kannat ovat mukavia?

Ortonormaalin kannan suhteen vektorin koordinaatit on helppo määrittää.

Lause

Oletetaan, että $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ on sisätuloavaruuden V ortonormaali kanta. Olkoon $\bar{v} \in V$. Tällöin

$$\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{u}_1 \rangle \bar{u}_1 + \langle \bar{v}, \bar{u}_2 \rangle \bar{u}_2 + \cdots + \langle \bar{v}, \bar{u}_n \rangle \bar{u}_n.$$