**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II**
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Syksy 2012**
**Harjoitus 1**

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 2.11.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 16.11.2012 klo 18.00

Käytä tehtävien palauttamisessa uutta kurssitunnusta. Se läheteään sinulle sähköpostissa.

Tehtävä 17 on hieman haastavampi tehtävä, ja voit korvata sillä minkä tahansa tämän harjoituksen tähdettömistä tehtävistä.

## Tehtäväsarja I

1. Merkitään $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v}_1 = (1,0)$, $\bar{v}_2 = (1,2)$ ja $\bar{v}_3 = (2,2)$. Määritä tulot $A\bar{v}_1$, $A\bar{v}_2$ ja $A\bar{v}_3$.

2. Jatkoa edelliseen tehtävään. Piirrä koordinaatistoon vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ sekä $A\bar{v}_1$, $A\bar{v}_2$ ja $A\bar{v}_3$. Mitä huomaat?

3. Matriisi $A$ on symmetrinen, jos $A = A^T$. Oletetaan, että $B$ on neliömatriisi. Merkitään $C = B + B^T$. Osoita, että matriisi $C$ on symmetrinen.

   *Neuvo:* Kertaa matriisin transpoosia käsittelevä luku.

## Tehtäväsarja II

4. Tarkastellaan matriiseista muodostuvaa vektoriavaruutta $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Mikä on tämän vektoriavaruuden nollavektori? Merkitään $D = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Millainen on vektorin $D$ vastavektori?

5. Mikä on polynomeista muodostuvan vektoriavaruuden $\mathcal{P}$ nollavektori? Merkitään $p = -3x^3 - x^2 + 6$. Mikä on vektorin $p$ vastavektori?

## Tehtäväsarja III

6. Oletetaan, että $W$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus ja $(-4,2), (3,0) \in W$. Osoita, että myös vektorit $(-1,2)$ ja $(15,0)$ ovat aliavaruuden $W$ alkioita.

7. Oletetaan, että $W$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus ja $(1,0,3), (0,-2,-1) \in W$. Osoita, että myös vektorit $(0,-8,-4)$ ja $(-1-2,-4)$ ovat aliavaruuden $W$ alkioita.

8. Merkitään $W = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Piirrä kuva joukosta $W$.

   (b) Oletetaan, että $\bar{w} \in W$ ja $\bar{u} \in W$. Osoita, että $\bar{w} + \bar{u} \in W$.

(c) Oletetaan, että $\bar{w} \in W$ ja $r \in \mathbb{R}$. Osoita, että $r\bar{w} \in W$.
(d) Osoita, että $\bar{0} \in W$.
(e) Totea, että $W$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.

9. Piirrä kuva joukosta $U = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$ ja osoita, ettei se ole vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.

10. Tarkastellaan $2 \times 2$ -matriisien muodostamaa vektoriavaruutta $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Osoita, että joukko $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 3a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

11. Tarkastellaan polynomien muodostamaa vektoriavaruutta $\mathcal{P}$. Tutki, onko joukko $U = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R},\ ab = 0\}$ avaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruus.

12.* Merkitään $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Oletetaan, että $U$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus ja $A$, $B \in U$. Päteekö tällöin välttämättä $3I \in U$? (Tässä $I$ on ykkösmatriisi.)

**Tehtäväsarja IV**

Määritellään positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}_+ = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\}$ yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ seuraavasti: jos $x$, $y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c\,.$$

13. Laske $3 \oplus 4$ ja $-3 \odot 2$.

14. Voidaan osoittaa, että $\mathbb{R}_+$ varustettuna yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$ on vektoriavaruus. Mikä on tämän vektoriavaruuden nollavektori? Mikä on vektorin 3 vastavektori?

**Tehtäväsarja V**

15. Määritä vektorin $(3, -5, 4)$ projektio vektorin $(1, 1, -2)$ virittämälle aliavaruudelle.

16.* Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Osoita, että vektorit $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ ja $\bar{w}$ ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan.

    *Neuvo:* Palauta mieleen, miten ortogonaalisuus määritellään luentomateriaalissa.

**Ylimääräinen tehtävä**

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi tehtävä. Sen tekemällä voit korvata minkä tahansa tämän harjoituksen tähdettömistä tehtävistä. Voit toki tehdä sen vielä muiden tehtävien lisäksi, jos kaipaat lisäpuuhaa.

17. Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus ja $\bar{v} \in V$. Osoita vektoriavaruuden määritelmän ehtoja käyttäen, että

    (a) $0\bar{v} = \bar{0}$ (b) $(-1)\bar{v} = -\bar{v}\,.$