

## Henkivakuutusmatematiikan laskuharjoitus 10, 3.12.2012

1. Tarkastellaan kilpailevien kuolinsyiden teorian mukaista asetelmaa Markov-prosessina, jossa tila 0 tarkoittaa elossa olevaa ja tila  $j$  syyhyn  $j$  kuollutta,  $j = 1, \dots, n$ . Hypoteettiset syittäiset elinajat  $T_1, \dots, T_n$  oletetaan toisistaan riippumattomiksi. Olkoon  $\mu_j$  elinaikaan  $T_j$  liittyvä kuolevuus,  $j = 1, \dots, n$ . Määrää siirtymäintensiteetit  $\mu_{jk}, j, k \in \{0, 1, \dots, n\}, j \neq k$ , kun henkilö on  $x$ -ikäinen hetkellä nolla.

2. (jatkoa) Kirjoita forward-yhtälöt todennäköisyyksien  $P_{0k}(t, u)$  ratkaisemiseksi, kun  $0 \leq t < u$ . Onko näillä yhteys lauseen 3.4 tulokseen.

3. Yhtiö maksaa sairausvakuutuksen perusteella seuraavan vuoden aikana korvauksen  $a/N$  jokaisena sellaisena hetkenä  $n/N$ , jona vakuutettu on sairas,  $n = 1, \dots, N$  (parametrit  $N \in \mathbb{N}$  ja  $a > 0$  oletetaan kiinteiksi sopimuksen mukaisiksi parametreiksi). Mallinnetaan vakuutetun tila Markov-prosessiksi, jossa mahdollisia tiloja ovat 'terve' ja 'sairas' (kuolevuus tarkasteltavalla ikävälillä oletetaan nolaksi). Oletetaan, että terve sairastuu intensiteetillä  $\sigma$  ja että sairas paranee intensiteetillä  $\tau$ , missä  $\sigma$  ja  $\tau$  ovat positiivisia vakioita. Määrää kokonaiskorvauksen odotusarvo, kun vakuutettu on vuoden alussa terve. Määrää myös kyseisen odotusarvon raja-arvo, kun  $N \rightarrow \infty$ . Mikä on raja-arvon tulkinta.

4. Markov-prosessin  $Z$  tila-avaruus olkoon  $E = \{1, \dots, N\}$ . Oletetaan lisäksi, että on olemassa sellainen tila  $k \in E$ , että

$$\int_0^\infty \mu_{1k}(s) ds = \infty,$$

ja että  $\mu_{j1}(u) = 0$  kaikilla  $j \neq 1$  ja  $u \geq 0$ . Osoita, että

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z(u) = 1 \mid Z(0) = 1) = 0.$$

5. Markov-prosessin  $Z$  tila-avaruus olkoon  $E = \{1, \dots, N\}$ . Oletetaan, että siirtymäintensiteetit  $\mu_{jk}$  ovat jatkuvia kaikilla  $j, k \in E$ . Oletetaan lisäksi, että intensiteetit  $\mu_{j,j+1}$  ja  $\mu_{kN}$  ovat positiivisia funktioita kaikilla  $j = 1, \dots, N-2$  ja  $k = 1, \dots, N-1$ . Muut intensiteetit ovat nolliä. Kirjoita Kolmogorovin forward-yhtälöt todennäköisyyksien

$$\mathbb{P}(Z(t) = j \mid Z(0) = 1), \quad j = 1, \dots, N,$$

määräämiseksi. Esitä sellainen rekursiivinen menetelmä yhtälöryhmän ratkaisemiseksi, jossa kussakin vaiheessa ratkaistaan ensimmäisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö.