Harjoitus 5, lisälehti

Ratkaisu tehtävän 6 loppuosaan

On annettu ratkaisu $y_1(x) = e^{2x}$, ja alkuosassa on laskettu kertaluvun pudotuksella riippumaton ratkaisu $y_2(x) = (x-2)^2 e^{2x}$; teorian mukaan pari (y_1, y_2) on DY:n pj. väleillä $x > 2$ ja $x < 2$ (joita koskee normaalimuoto, joka ei ole olemassa kun $x = 2$). Jatkuvuuden nojalla y_2 on alkuperäisen DY:n ratkaisu myös pisteessä $x = 2$, ja sitä myöten koko $\mathbf{R}$:ssä. Kaksiparametrinen funktiojoukko

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{2x} + c_2 (x-2)^2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}, \quad (*)$$

on (alkuperäisen) DY:n yleinen ratkaisu $\mathbf{R}$:ssä (yleinen ratkaisu ei ole täysin eksakti käsite).

Väite. DY:n kaikki ratkaisut saadaan välittömästi muodosta $(*)$.

Tod. Olkoon $z : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ DY:n ratkaisu. Koska pari (y_1, y_2) on pj. väleillä $x > 2$ ja $x < 2$, funktio z yhtyy kummallakin välillä muodosta $(*)$ saatuun funktioon: joillakin $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ funktio z on välillä $x > 2$ sama kuin $z_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2$, ja joillakin $d_1, d_2 \in \mathbf{R}$ se on välillä $x < 2$ sama kuin $z_2 = d_1 y_1 + d_2 y_2$.
Osoitetaan c- ja d-kertoimet samoiksi. Jatkuvuuden nojalla z on sekä z_1 että z_2 myös reunapisteessä $x = 2$ - siis se on z_1 välillä $x \geq 2$ ja z_2 välillä $x \leq 2$. Erityisesti

$$c_1 e^4 = z_1(2) = z(2) = z_2(2) = d_1 e^4 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = d_1.$$

Koska z toteuttaa 2.kl. DY:n, derivaatat $z'(2)$ ja $z''(2)$ ovat olemassa, ja ne yhtyvät toispuolisiin derivaattoihin, $z_1'(2)$ sekä $z_1''(2)$ oikealla ja $z_2'(2)$ sekä $z_2''(2)$ vasemmalla. Siten

$$2c_1 e^4 = z_1'(2) = z'(2) = z_2'(2) = 2d_1 e^4,$$

mikä ei tuo mitään uutta, mutta

$$4c_1 e^4 + 2c_2 e^4 = z_1''(2) = z''(2) = z_2''(2) = 4d_1 e^4 + 2d_2 e^4,$$

josta $c_2 = d_2$ (aikaisemmin saatiin $c_1 = d_1$). Siten

$$z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R},$$

siis kaikki ratkaisut saadaan muodosta $(*)$ (ja vasta nyt voidaan sanoa, että pari (y_1, y_2) on DY:n pj. koko $\mathbf{R}$:ssä).

Huom. Annetut $y(2)$ ja $y'(2)$, 2.kl:n tavallinen alkuehto, eivät määrää kertoimia yksikäsitteisesti muodossa $(*)$, mutta OY-lauseita ei voikaan soveltaa pisteisiin $(2, y)$, sillä normaalimuoto ei ole niissä edes olemassa. Nähtiin myös että alkuehtoja $y(2) = y_0$ ja $y'(2) = y_1$ ei voi asettaa mielivaltaisesti, vaan ratkaisu löytyy vain kun $y_1 = 2y_0$.