

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä käytössään.

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$(\cos x + \sin y) + (\sin y + x \cos y)y' = 0.$$

Implisiittiratkaisu riittää.

2. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$x^3y' - 2x^2y = 4, \quad y(-1) = 1,$$

ja anna sen maksimaalinen ratkaisuväli.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$2y'' + 4y' + 4y = xe^x.$$

4. Erään funktion $x = x(t)$ käyttäytymisestä oletetaan seuraavaa: Tietty tekijä kasvattaa funktiota nopeudella, joka on suoraan verrannollinen senhetkisen arvon neliöön verrannollisuuskertoimenaan a , ja toinen tekijä puolestaan vähentää sitä nopeudella, joka on suoraan verrannollinen arvon kuutioon verrannollisuuskertoimenaan b . Oletetaan lisäksi että $a > b > 0$.

(a) (2 p) Kirjoita näiden tietojen perusteella differentiaaliyhtälö funktiolle $x(t)$. Mitä perustyyppiä se on?

(b) (4 p) Olkoon $x(t)$ erityisesti alkuehdon $x(0) = 1$ toteuttava yhtälön ratkaisu. Mitä voit sanoa sen maksimaalisesta ratkaisuvälistä ja raja-arvoista kun $t \rightarrow \pm\infty$? Yhtälöä ei tarvitse ratkaista.