

Differentiaaliyhtälöt I

Harjoitus 4, syksy 2012

1. Etsi käyrät muotoa $y = y(x)$, joilla on ominaisuus, että käyrän pisteeseen $(x_0, y(x_0))$ asetettu tangentti aina leikkaa x -akselin pisteessä $(x_0 + x_0^2/k, 0)$, missä $k \neq 0$ on vakio.

2. Erään kappaleen ja sen ympäristön lämpötilat olkoot ajan funktioita $T_1 = T_1(t)$ ja $T_2 = T_2(t)$ vuorovaikuttaen niin että kummankin muutosnopeus kullakin hetkellä on suoraan verrannollinen lämpötilojen eroon $T_1(t) - T_2(t)$ verrannollisuuskerroimina vakiot $a < 0$ ja $b > 0$ (nk. Newtonin jäähtymislaki).

(a) Muodosta differentiaaliyhtälöpari funktioille T_1 ja T_2 .

(b) Onnistutko ratkaisemaan parin?

Ohje. (b) Eliminoi pari yhdeksi yhtälöksi.

3. Ratkaise yhtälö

$$y' = (x + y + 2)^2.$$

4. Ratkaise yhtälö

$$x^2 - xyy' + y^2 = 0.$$

5. Ratkaise yhtälö

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x + y + 4}{x + 3y + 2}.$$

6. Haukka lentää 200 metrin korkeudessa, kun se huomaa suoraan alapuolellaan kanin. Samalla kani huomaa haukan ja lähtee salamana kiihdyttäen juoksemaan nopeudella 10 m/s suoraan kohti kotokoloansa. Haukka syöksyy koko ajan suoraan kohti kania nopeudella 35 m/s. Saako haukka kanin kiinni ennen kuin se ehtii koloonsa, kun tämä on 60 metrin päässä?