Differentiaaliyhtälöt I
Harjoitus 3, syksy 2012

1. Merivesialtaan mitat ovat 16m $\times$ 10m $\times$ 3m. Aluksi se on täynnä 3-prosenttista suolavettä.

(a) Altaaseen lasketaan makeata vettä nopeudella $1.5\, m^3/min$ ja samalla nopeudella pois täysin sekoittunutta vettä. Milloin altaan vesi on suolapitoisuudeltaan 2-prosenttista?

(b) Sama tehtävä mutta altaaseen laskettavan veden suolapitoisuus on 1.5 prosenttia.

2. Erään järven kalakannaksi laskettiin 10000 yksilöä vuonna 1990 ja 5000 yksilöä vuonna 2000. Mallinnetaan kalapopulaatiota $p(t)$ logistisella yhtälöllä (2.9), $\dot{p}(t) = rp(t)\big(1 - p(t)/K\big)$. Parametrin r arvoksi arvioidaan 0.1 (kun ajan t yksikkö on vuosi), mutta ympäristön kantokykyä K ei tunneta.

(a) Ratkaise K, (b) ennusta kalakanta vuonna 2010.

Huom. Jos myös r on tuntematon, tarvitaan (vähintään) kolme tunnettua populaation arvoa. Tällöin päädytään yhtälöryhmään, joka (yleensä) pitää ratkaista jollain numeerisella keinolla.

3. Ratkaise AAT

$$\dot{x} + 4tx = 2t\sqrt{x}, \quad x(0) = 1.$$

4. Ratkaise AAT

$$y' = ay - by^4, \quad y(0) = c,$$

jossa $a, b, c > 0$ ovat vakioita. Määrää lisäksi ratkaisun raja-arvo $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

5. Tarkastellaan tartuntatautien SIR-mallia, tarkemmin sen paria (2.16),

$$\frac{ds}{dt}(t) = -\alpha R_0 s(t)i(t), \quad \frac{di}{dt}(t) = \alpha R_0 s(t)i(t) - \alpha i(t).$$

Oletetaan että $0 < s(0), i(0) < 1$. Osoita että $i(t), s(t) > 0$ kaikilla $t \geq 0$.

Ohje. Voit pitää tunnettuna että ratkaisu on olemassa välillä $[0, \infty[$. Olivatpa ratkaisufunktiot $i(t)$ ja $s(t)$ mitä hyvänsä, voit kiinnittää ne vuorollaan ja soveltaa OY-lausetta Theorem 1.2 erikseen parin (2.16) yhtälöihin.

6. Jatketaan tehtävää 5: osoita että

$$(a) \quad \exists s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t) > 0, \quad (b) \quad \exists i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) = 0.$$

Ohje. Sovella tehtävän 5 tulosta ja yhtälöä (2.18), lopuksi lemma 2.1.