Differentiaaliyhtälöt I, harj. 5, syksy 2012

1. Voivatko seuraavat funktioparit y_1 & y_2 muodostaa 2. kl. homog. yhtälön perusjärjestelmän koko $\mathbb{R}$:ssä?

a) $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = x$
$\Rightarrow y_1'(x) = 3x^2$, $y_2'(x) = 1$

$\Rightarrow$ Wronskin determinantti:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 & x \\ 3x^2 & 1 \end{vmatrix} = x^3 \cdot 1 - x \cdot 3x^2$$

$= -2x^2 = 0$, kun $x = 0$
$\Rightarrow$ (y_1, y_2) ei voi olla pj. koko $\mathbb{R}$:ssä
(kts. L 3.12. & Korollaari 3.7).

b) $y_1 = \sin 2x$, $y_2 = \cos 2x$

$$\Rightarrow W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}$$

$= -2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x = -2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (y_1, y_2)$ voi olla pj.:

Esim. $y'' + 4y = 0$.

c) $y_1 = \sin 2x$, $y_2 = \cos x$

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos x \\ 2\cos 2x & -\sin x \end{vmatrix} =$$

$= (-\sin x)(\sin 2x) - (\cos x)(2\cos 2x)$
$= -[\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x] - \cos x \cos 2x$
$= -\cos(2x - x) - \cos x \cos 2x = -\cos x(1 + \cos 2x) = 0$, kun
$x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ (ml. $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$)
$\Rightarrow (y_1, y_2)$ ei ole pj. koko $\mathbb{R}$:ssä.

2. 2 kl. vakiokert. lin. homog. yhtälöitä.

a) $3y'' + 2y' + y = 0$

KY: $3r^2 + 2r + 1 = 0$

$\iff r^2 + \frac{2}{3}r + \frac{1}{3} = 0$

$\iff \quad r = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \pm i\sqrt{\frac{2}{9}}$

$\Rightarrow r_1 = -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}, \ r_2 = -\frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}$

L 3.13. nojalla pj. on $(y_1, y_2)(x)$

$= \left(e^{-\frac{1}{3}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{3}x, \ e^{-\frac{1}{3}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)$

(& yl. ratk. on $c_1 y_1 + c_2 y_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

b) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$

KY: $r^2 - 4r + 4 = 0 \iff (r-2)^2 = 0$

Kaksoisjuuri $r_0 = 2 \Rightarrow$ Pj. on

$(x_1, x_2)(t) = (e^{2t}, te^{2t})$

3. $\ddot{x} + 9x = 4t - 2 + e^{-3t} =: r(t)$

HY: $\ddot{x} + 9x = 0$
KY: $r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i$

L 3.12. $\Rightarrow$ Pj. on $(x_1, x_2) = (\cos 3t, \sin 3t)$

EHY: $r(t) = 4t - 2 + e^{-3t}$

Val. yrite

$$x = bt + c + de^{-3t}$$
$$\Rightarrow \dot{x} = b - 3de^{-3t}$$
$$\Rightarrow \ddot{x} = 9de^{-3t}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 9x = 9de^{-3t} + 9(bt + c + de^{-3t})$$
$$= 9bt + 9c + 18e^{-3t}$$
$$= r(t) = 4t - 2 + e^{-3t}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9b = 4 \\ 9c = -2 \\ 18d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4/9 \\ c = -2/9 \\ d = \frac{1}{18} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ EHY:llä on erit. ratk

$$x_r = \frac{4}{9}t - \frac{2}{9} + \frac{1}{18}e^{-3t}$$

$\Rightarrow$ EHY:n yl. ratk. on

$x_r + Ax_1 + Bx_2$

$= \frac{4t}{9} - \frac{2}{9} + \frac{1}{18}e^{-3t} + A\cos 3t + B\sin 3t$

$\forall t \in R \quad , A, B \in R.$

4. $Lx := \ddot{x} - 9x = e^{-3t} =: h(t)$

HY: $\ddot{x} - 9x = 0$
KY: $r^2 - 9 = 0 \iff r = \pm 3$

$\Rightarrow$ HY:llä on pj. $(x_1, x_2) = (e^{3t}, e^{-3t})$

EHY: yrite $x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$

Nyt $Lx = h(t)$

$$\iff \begin{cases} \dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = 0 \\ \dot{c}_1 \dot{x}_1 + \dot{c}_2 \dot{x}_2 = h(t) \end{cases}$$ (ks. luennot s. 42 & (3.13))

$$\iff \begin{cases} e^{3t}\dot{c}_1 + e^{-3t}\dot{c}_2 = 0 \\ 3e^{3t}\dot{c}_1 - 3e^{-3t}\dot{c}_2 = e^{-3t} \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot (-1) \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} 6e^{3t}\dot{c}_1 = e^{-3t} \\ 6e^{-3t}\dot{c}_2 = -e^{-3t} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dot{c}_1 = \frac{1}{6}e^{-6t} \\ \dot{c}_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Siis $c_1(t) = \int \frac{1}{6}e^{-6t}\,dt = -\frac{1}{36}e^{-6t}$

$c_2(t) = \int -\frac{1}{6}\,dt = -\frac{1}{6}t \;(+C)^{(*)}$

EHY:llä on yksittäisratk. $x_p = c_1 x_1 + x_2 c_2$

$= -\frac{1}{36}e^{-6t}\cdot e^{3t} - \frac{1}{6}t\cdot e^{-3t}$

& EHY:n yl. ratk. on $x = x_p + A x_1 + B x_2$

$= -\frac{1}{36}e^{-3t} - \frac{1}{6}te^{-3t} + A_1 e^{3t} + B_1 e^{-3t}$

$= -\frac{1}{6}te^{-3t} + Ae^{3t} + Be^{-3t} \quad (A = A_1,\ B = B_1 - \frac{1}{36})$

(*) C [illegible]

5. (I) $Ly = 4x^2y'' + 4xy' - y = 0 \quad , x > 0$

a) Yrite: $y = x^{-r} \quad , r > 0$

$$\Rightarrow y' = -rx^{-r-1}, \quad y'' = r(r+1)x^{-r-2}$$

$$\Rightarrow Ly = 4x^2 \cdot r(r+1)x^{-r-2} + 4x\cdot(-r)x^{-r-1} - x^{-r}$$

$$= 4r(r+1)x^{-r} - 4rx^{-r} - x^{-r}$$
$$= [4r(r+1) - 4r - 1]x^{-r}$$
$$= [4r^2 - 1]x^{-r} = 0$$

kun $4r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow r = \pm\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}, \quad y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x^{\frac{1}{2}} & x^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & -\frac{1}{2}x^{-3/2} \end{vmatrix}$$

$= -\frac{1}{2}x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-1} = -x^{-1} \neq 0$, kun $x > 0$

$\Rightarrow (y_1, y_2) = (x^{1/2}, x^{-1/2})$ on pj. $]0, \infty[$:ssä.

b) Sij. vapaaksi muuttujaksi $t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$
& merk. $y(x) = u(t)$ | $u' = \frac{du}{dt}$
$y'(x) = u'(t)t' = u'(t)\cdot\frac{1}{x}$ | $t' = dt/dx$
$y''(x) = u''(t)(t')^2 + u'(t)t'' = u''(t)\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}u'(t)$

&
(I) $\Leftrightarrow 4x^2\left(u''(t)\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}u'(t)\right) + 4x\left(u'(t)\cdot\frac{1}{x}\right) - u(t) = 0$

$\Leftrightarrow 4u'' - 4u' + 4u' - u = 0 \Leftrightarrow 4u'' - u = 0$
$\Leftrightarrow u'' - \frac{1}{4}u = 0$

Vakiokert. 2. kl. lin. HY.

KY: $\lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow u(t) = e^{\pm\frac{1}{2}t} = (e^t)^{\pm\frac{1}{2}} = x^{\pm\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow y = Ax^{1/2} + Bx^{-1/2} \quad , A, B \in \mathbb{R} \quad , x > 0$

Siis sama ratk. kuin a)-kohdassa.

6. (I) $Ly = (x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0$

HY:llä on $\mathbb{R}$:ssä ratk. $y_1(x) := e^{2x}$.
(Tod. suora sij. $Ly_1 = \ldots = 0$)

y_2 kertaluvun pudotuksella: yrite $y(x) = u(x)y_1(x)$

$$\Rightarrow y' = u'y_1 + uy_1'$$
$$y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

$$\Rightarrow Ly = (x-2)(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') - (4x-7)(u'y_1 + uy_1') + (4x-6)uy_1$$

$$= (x-2)u''y_1 + (2(x-2)y_1' - (4x-7)y_1)u' + u\underbrace{Ly_1}_{=0}$$

$$= (x-2)e^{2x}u'' + (4(x-2)e^{2x} - (4x-7)e^{2x})u'$$

$$= \ldots = e^{2x}[(x-2)u'' - u'] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)u'' - u' = 0 \quad (II)$$

Merk. $v = u'$, jolloin (II) $\Leftrightarrow$

$$(x-2)v' - v = 0 \Leftrightarrow v' - \frac{1}{x-2}v = 0, \text{ kun } x \neq 2.$$

1. kl. lin. homog. DY: yl. ratk. kaavan (5.5.) mukaan

$$v = C\exp\left(-\int \frac{-1}{x-2}\,dx\right) = C\exp(\ln|x-2|)$$

$= C|x-2|$. Val. $v = x-2$

$$\Rightarrow u = \int v(x)\,dx = \int (x-2)\,dx = \frac{1}{2}(x-2)^2$$

$$\Rightarrow y_2 := y = uy_1 = \frac{1}{2}(x-2)^2 e^{2x}$$

Kun $x \neq 2$, $(I) \Leftrightarrow$

$$(III) \quad y'' - \underbrace{\frac{4x-7}{x-2}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{4x-6}{x-2}}_{q(x)} y = 0,$$

$p, q \in C(I)$, kun $I = I_+ =]2, \infty[$ t. $I = I_- =]-\infty, 2[$
& $y_1 = e^{2x} \neq 0$, kun $x \in I_\pm$. L 3.14 $\Rightarrow$
$y_2 = u y_1$ antaa toisen ratkaisun &
(y_1, y_2) on pj. I_+:ssa & I_-:ssa.

$\Rightarrow$ Jos y on (I):n ratk. $\mathbb{R}$:ssä, on y
(III):n ratk. $I_\pm$:ssa. Koska (y_1, y_2) on pj.
$I_\pm$:ssa on y muotoa

$$y = \begin{cases} a y_1 + b y_2, & x \leq 2 \\ c y_1 + d y_2, & x \geq 2 \end{cases}$$

($\leq$ & $\geq$ eikä $>$ & $<$, koska y on jva $\mathbb{R}$:ssä.
& siis $y(2) = y(2+) = y(2-)$).

$\Rightarrow y_2(2) = y_2'(2) = 0$, $y_1(2) = e^4$, $y_1'(2) = 2e^4$
$\Rightarrow y(2) = a y_1(2) = c y_1(2) \Leftrightarrow a = c$
& $y'(2) = 2ae^4 = 2ce^4 \Leftrightarrow a = c$

$$y''(x) = \begin{cases} 4ae^{2x} + b e^{2x}, & x \leq 2 \\ 4ce^{2x} + d e^{2x}, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y''(2) = (4a + b)e^4 = (4c + d)e^4$$

$$\Rightarrow 4a + b = 4c + d \overset{a=c}{\Rightarrow} b = d$$

$\Rightarrow (I)$:n ratk. $\mathbb{R}$:ssä on muotoa

$$y = a y_1 + b y_2$$

Vastaus: Antaa (kaikki ratk. $\mathbb{R}$:ssä).

Harjoitus 5, lisälehti

Ratkaisu tehtävän 6 loppuosaan

On annettu ratkaisu $y_1(x) = e^{2x}$, ja alkuosassa on laskettu kertaluvun pudotuksella riippumaton ratkaisu $y_2(x) = (x-2)^2e^{2x}$; teorian mukaan pari (y_1, y_2) on DY:n pj. väleillä $x > 2$ ja $x < 2$ (joita koskee normaalimuoto, joka ei ole olemassa kun $x = 2$). Jatkuvuuden nojalla y_2 on alkuperäisen DY:n ratkaisu myös pisteessä $x = 2$, ja sitä myöten koko $\mathbf{R}$:ssä. Kaksiparametrinen funktiojoukko

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^{2x} + c_2(x2)^2e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}, \quad (*)$$

on (alkuperäisen) DY:n yleinen ratkaisu $\mathbf{R}$:ssä (yleinen ratkaisu ei ole täysin eksakti käsite).

Väite. DY:n kaikki ratkaisut saadaan välittömästi muodosta $(*)$.

Tod. Olkoon $z : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ DY:n ratkaisu. Koska pari (y_1, y_2) on pj. väleillä $x > 2$ ja $x < 2$, funktio z yhtyy kummallakin välillä muodosta $(*)$ saatuun funktioon: joillakin $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ funktio z on välillä $x > 2$ sama kuin $z_1 = c_1y_1 + c_2y_2$, ja joillakin $d_1, d_2 \in \mathbf{R}$ se on välillä $x < 2$ sama kuin $z_2 = d_1y_1 + d_2y_2$.
Osoitetaan c- ja d-kertoimet samoiksi. Jatkuvuuden nojalla z on sekä z_1 että z_2 myös reunapisteessä $x = 2$ - siis se on z_1 välillä $x \geq 2$ ja z_2 välillä $x \leq 2$. Erityisesti

$$c_1e^4 = z_1(2) = z(2) = z_2(2) = d_1e^4,$$

joten $c_1 = d_1$.
Koska z toteuttaa 2.kl. DY:n, derivaatat $z'(2)$ ja $z''(2)$ ovat olemassa, ja ne yhtyvät toispuolisiin derivaattoihin, $z_1'(2)$ sekä $z_1''(2)$ oikealla ja $z_2'(2)$ sekä $z_2''(2)$ vasemmalla. Siten

$$2c_1e^4 = z_1'(2) = z'(2) = z_2'(2) = 2d_1e^4,$$

mikä ei tuo mitään uutta, mutta

$$4c_1e^4 + 2c_2e^4 = z_1''(2) = z''(2) = z_2''(2) = 4d_1e^4 + 2d_2e^4,$$

josta $c_2 = d_2$ (aikaisemmin saatiin $c_1 = d_1$). Siten

$$z(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \quad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R},$$

siis kaikki ratkaisut saadaan muodosta $(*)$ (ja nyt voidaan sanoa, että pari (y_1, y_2) on DY:n pj. koko $\mathbf{R}$:ssä).

Huom. Annetut $z(2)$ ja $z'(2)$, 2.kl:n tavallinen alkuehto, eivät määrää kertoimia yksikäsitteisesti muodossa $(*)$, mutta OY-lauseita ei voikaan soveltaa pisteisiin $(2, y)$, sillä normaalimuoto ei ole niissä edes olemassa.