Diff.yht. I, harj. 4, 2.–3.10.2012, ratk. (Jouni Luukkainen), 3 sivua

1. *Etsi ne käyrät muotoa $y = y(x)$, joilla on ominaisuus, että käyrän pisteeseen $(x_0, y(x_0))$ asetettu tangentti aina leikkaa x-akselin pisteessä $(x_0 + x_0^2/k, 0)$, jossa $k \neq 0$ on vakio.*

Ratk. Emme kelpuuta käyriä, joilla on x-akseli tangenttina. Vaadimme siis, että $y(x) \neq 0$ kaikilla x. Käyrän $y = y(x)$ pisteeseen $(x_0, y(x_0))$ asetetun tangentin yhtälö on $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$. Tangentti kulkee pisteen $(x_0 + x_0^2/k, 0)$ kautta jos ja vain jos $-y(x_0) = y'(x_0)x_0^2/k$ eli jos ja vain jos $x_0^2 y'(x_0) + ky(x_0) = 0$. On siis ratkaistava yhtälö

$$x^2 y' + ky = 0.$$

Väleillä $x \gtrless 0$ saadaan yhtäpitävästi lineaarisen yhtälön normaalimuoto

$$y' + \frac{k}{x^2} y = 0,$$

jonka lukua 0 arvokseen saamaton ratkaisu on $y(x) = Ce^{-\int (k/x^2)\,dx} = \underline{Ce^{k/x}}$ $(C \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Huom. Yhtälöllä on triviaaliratkaisu $y(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tapauksessa $k > 0$ pätee, että $e^{k/x} \to 0$ ja $(d/dx)e^{k/x} = -(k/x^2)e^{k/x} \to 0$, kun $x \to 0-$, joten ratkaisu $y(x) = Ce^{k/x}$ välillä $x < 0$ voidaan jatkaa triviaaliratkaisulla ratkaisuksi koko $\mathbb{R}$:ssä. Vastaavalla tavalla tapauksessa $k < 0$ ratkaisu $y(x) = Ce^{k/x}$ välillä $x > 0$ voidaan jatkaa triviaaliratkaisulla ratkaisuksi koko $\mathbb{R}$:ssä. Mutta näillä on $y(0) = 0 = y'(0)$, emmekä siksi siis kelpuuta niitä alkuperäisen ongelman ratkaisuiksi.

2. *Erään kappaleen ja sen ympäristön lämpötilat olkoot ajan funktioita $T_1 = T_1(t)$ ja $T_2 = T_2(t)$ vuorovaikuttaen niin, että kummankin muutosnopeus kullakin hetkellä on suoraan verrannollinen lämpötilojen eroon $T_1(t) - T_2(t)$ verrannollisuuskertoimina vakiot $a < 0$ ja $b > 0$ (nk. Newtonin jäähtymislaki).*

(a) *Muodosta differentiaaliyhtälöpari funktioille T_1 ja T_2.*

(b) *Onnistutko ratkaisemaan parin?*

Ohje. (b) *Eliminoi pari yhdeksi yhtälöksi.*

Ratk. (a) Differentiaaliyhtälöpari on

$$\begin{cases} \dot{T}_1(t) = a(T_1(t) - T_2(t)) \\ \dot{T}_2(t) = b(T_1(t) - T_2(t)) \end{cases}.$$

(Yhtälöpari on siis autonominen eli ajan nollakohta voidaan valita mielivaltaisesti. Lisäksi lämpötilan nollakohta ja skaalaus voidaan valita mielivaltaisesti, sillä jos $\alpha > 0$ ja $\beta \in \mathbb{R}$, niin funktiot $T_1^* = \alpha T_1 + \beta$ ja $T_2^* = \alpha T_2 + \beta$ toteuttavat saman differentiaaliyhtälöparin funktioiden T_1 ja T_2 sijassa.)

(b) Vähentämällä jälkimmäinen yhtälö edellisestä erotukselle $x(t) = T_1(t) - T_2(t)$ saadaan lineaarinen homogeeninen differentiaaliyhtälö $\dot{x}(t) = -(b - a)x(t)$, jonka yleinen ratkaisu on $x(t) = Ce^{-(b-a)t}$ $(C \in \mathbb{R})$. Tulee yhtälö $\dot{T}_1(t) = aCe^{-(b-a)t}$, jonka ratkaisuksi saadaan

$$T_1(t) = -\frac{aC}{b-a} e^{-(b-a)t} + D \quad (D \in \mathbb{R}).$$

Funktio T_2 määräytyy "nollannen kertaluvun differentiaaliyhtälöstä":

$$T_2(t) = T_1(t) - x(t) = -\frac{aC}{b-a} e^{-(b-a)t} + D - Ce^{-(b-a)t} = -\frac{bC}{b-a} e^{-(b-a)t} + D.$$

(Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön $\dot{T}_2(t) = bCe^{-(b-a)t}$ käyttö toisi kolmannen, D:tä vastaavan integroimisvakion D^*, jolloin tapauksessa $D^* \neq D$ pari (T_1, T_2) ei toteuttaisi alkuperäistä differentiaaliyhtälöparia.)

Määritetään C ja D alkulämpötilojen $T_1(0)$ ja $T_2(0)$ avulla:

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{b-a}C + D = T_1(0) \\ -\dfrac{b}{b-a}C + D = T_2(0) \end{cases} \iff \begin{cases} C = T_1(0) - T_2(0) \\ D = T_1(0) + \dfrac{a}{b-a}(T_1(0) - T_2(0)) = \dfrac{bT_1(0) - aT_2(0)}{b-a} \end{cases}.$$

Täten ratkaisuksi saadaan

$$\begin{cases} T_1(t) = \dfrac{bT_1(0) - aT_2(0)}{b-a} - \dfrac{a(T_1(0) - T_2(0))}{b-a}e^{-(b-a)t} \\ T_2(t) = \dfrac{bT_1(0) - aT_2(0)}{b-a} - \dfrac{b(T_1(0) - T_2(0))}{b-a}e^{-(b-a)t} \end{cases} \quad \forall t \geq 0.$$

Huom. Koska $b > 0 > a$, niin on olemassa yhteinen raja-arvo

$$\lim_{t\to\infty} T_1(t) = \lim_{t\to\infty} T_2(t) = \frac{bT_1(0) - aT_2(0)}{b-a},$$

jolle pätee:

$$(i,j) \in \{(1,2),(2,1)\} \;\&\; T_i(0) < T_j(0) \implies T_i(0) < \frac{bT_1(0) - aT_2(0)}{b-a} < T_j(0).$$

3. *Ratkaise yhtälö* $y' = (x+y+2)^2$.

Ratk. Tehdään sijoitus $z(x) = x + y(x) + 2 \iff y(x) = z(x) - x - 2$, jolloin $y' = z' - 1$. Saadaan yhtäpitävä separoituva yhtälö, jonka ratkaisuun tehdään takaisinsijoitus:

$$y' = (x+y+2)^2 \iff z' - 1 = z^2 \iff z' = 1 + z^2 \iff \int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx \iff \arctan z = x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$
$$\iff z(x) = \tan(x+C),\ \text{kun } |x+C| < \tfrac{1}{2}\pi \iff y(x) = \tan(x+C) - x - 2,\ \text{kun } -\tfrac{1}{2}\pi - C < x < \tfrac{1}{2}\pi - C.$$

4. *Ratkaise yhtälö* $x^2 - xyy' + y^2 = 0$.

Ratk. Yhtälössä on $y = 0 \iff x = 0$. Olkoon $x \neq 0 \neq y$. Tällöin

$$x^2 - xyy' + y^2 = 0 \iff y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \iff y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Saatiin tasa-asteinen yhtälö. Sijoituksella $z(x) = y(x)/x \iff y(x) = xz(x)$, jolloin $y' = xz' + z$, saadaan yhtäpitävä separoituva yhtälö, jonka ratkaisuun tehdään takaisinsijoitus:

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \iff xz' + z = \frac{1}{z} + z \iff xz' = \frac{1}{z} \iff \int z\,dz = \int \frac{dx}{x} \iff \tfrac{1}{2}z^2 = \ln|x| + C \quad (C \in \mathbb{R})$$
$$\iff z(x) = \pm\sqrt{2}\sqrt{\ln|x| + C}, \quad \text{kun } \ln|x| + C > 0 \text{ eli } |x| > e^{-C}$$
$$\iff y(x) = x\sqrt{2}\sqrt{\ln|x| + C} \quad \text{tai} \quad y(x) = -x\sqrt{2}\sqrt{\ln|x| + C}, \quad \text{kun } x < -e^{-C} \text{ tai kun } x > e^{-C} \ (C \in \mathbb{R}).$$

Nämä ovat myös alkuperäisen yhtälön kaikki ratkaisut, sillä piste $x = 0$ ei edes ole minkään ratkaisuvälin päätepiste.

5. *Ratkaise yhtälö* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3x + y + 4}{x + 3y + 2}$.

Ratk. Yhtälöön sisältyy rajoitus $x + 3y + 2 \neq 0$. Tehdään sijoitus $\begin{cases} x = u + a \\ y = v + b \end{cases}$ vakioin $a, b \in \mathbb{R}$, joilla

$$\begin{cases} -3a + b + 4 = 0 \\ a + 3b + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Siis

$$\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} u = x - 1 \\ v = y + 1 \end{cases}.$$

Tällöin $-3x + y + 4 = -3u + v$ ja $x + 3y + 2 = u + 3v$. Nyt $v(u) = y(u + 1) + 1 = y(x) + 1$ ja $v'(u) = y'(u + 1) = y'(x)$. Saadaan yhtäpitävä tasa-asteinen yhtälö

$$\iff \frac{dv}{du} = \frac{-3u + v}{u + 3v} \iff \frac{dv}{du} = \frac{-3 + \frac{v}{u}}{1 + 3\frac{v}{u}}$$

lisäehdolla $u \neq 0$ ($\iff x \neq 1$). Sijoituksella $z(u) = v(u)/u \iff v(u) = uz(u)$, jolloin $v'(u) = uz'(u) + z(u)$, saadaan separoituva yhtälö, jonka ratkaisuun tehdään takaisinsijoitukset:

$$\begin{aligned}
&\iff uz' + z = \frac{-3 + z}{1 + 3z} \iff uz' = -3\frac{1 + z^2}{1 + 3z} \iff \int \frac{1 + 3z}{1 + z^2}\, dz = -3 \int \frac{du}{u} \\
&\iff \arctan z + \frac{3}{2} \ln(1 + z^2) = -3 \ln |u| + C_0 \quad (C_0 \in \mathbb{R}) \iff 2 \arctan z + 3 \ln(u^2(1 + z^2)) = 2C_0 \\
&\iff 2 \arctan \frac{v}{u} + 3 \ln(u^2 + v^2) = C \quad (C = 2C_0) \iff 2 \arctan \frac{y + 1}{x - 1} + 3 \ln((x - 1)^2 + (y + 1)^2) = C.
\end{aligned}$$

Ratkaisuun sisältyvään rajoitukseen $x \neq 1$ tulee lisätä alkuperäinen rajoitus $x+3y+2 \neq 0$ eli $(y+1)/(x-1) \neq -1/3$.

6. *Haukka lentää* 200 *metrin korkeudessa, kun se huomaa suoraan alapuolellaan kanin. Samalla kani huomaa haukan ja lähtee salamana kiihdyttäen juoksemaan nopeudella* 10 m/s *suoraan kohti kotokoloansa. Haukka syöksyy koko ajan suoraan kohti kania nopeudella* 35 m/s. *Saako haukka kanin kiinni ennen kuin se ehtii koloonsa, kun tämä on* 60 *metrin päässä?*

Ratk. Unohdetaan aluksi kolo, ja otetaan se huomioon vasta lopussa. Ajatellaan siis ensin, että kani yrittää välttää haukan yksistään juoksemalla yhteen suuntaan.

Nyt kyseessä on luennoilla tarkasteltu ja valmiiksi ratkaistu takaa-ajomalli, jossa xy-koordinaatiston origo on haukan lähtöpiste, x-akseli on suoraan alaspäin, maanpinta on kohdassa $x = a = 200$ ja y-akseli on kanin juoksureitin suuntainen. Haukan lentonopeus on $\alpha = 35$ ja kanin juoksunopeus $\beta = 10$. Koska $\alpha > \beta$, haukka tavoittaa kanin kanin juostua matkan

$$\frac{a\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{200 \cdot 35 \cdot 10}{35^2 - 10^2} = \frac{200 \cdot 35 \cdot 10}{25 \cdot 45} = \frac{560}{9} = 62\tfrac{2}{9}.$$

Mutta koska oikeasti kanilla olikin kolo 60 metrin päässä, kani pelastui.