Diff.yht. I, harj. 3, 25–26.9.2012, ratk. (Jouni Luukkainen), 4 sivua

Huom. Muotoa $\dot{x}(t) = f(x(t))$ oleva yhtälö, jonka määrittelevä funktio f ei siis riipu t:stä, on *autonominen*. Silloin, jos x on välillä $\Delta \ni t_0$ määritelty ratkaisu, myös välillä $\Delta^* = \Delta - t_0 \ni 0$ määritelty funktio $x^*(t) = x(t+t_0)$, jolle $x^*(0) = x(t_0)$, on ratkaisu, sillä $\dot{x}^*(t) = \dot{x}(t+t_0) \cdot 1 = f(x(t+t_0)) = f(x^*(t))\ \forall t \in \Delta^*$. Ajan alkuhetki voidaan siis kiinnittää mielivaltaisesti, mikä on tärkeää sovelluksissa (vrt. teht. 1, 2, 5 ja 6).

1. *Merivesialtaan mitat ovat* 16 m × 10 m × 3 m. *Aluksi se on täynnä* 3*-prosenttista suolavettä.*
(a) *Altaaseen lasketaan makeata vettä nopeudella* $1,5\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ *ja samalla nopeudella pois täysin sekoittunutta vettä. Milloin altaan vesi on suolapitoisuudeltaan* 2*-prosenttista?*
(b) *Sama tehtävä, mutta altaaseen laskettavan veden suolapitoisuus on* $1,5$ *prosenttia.*

Ratk. Altaan tilavuus on $V = 480\ \mathrm{m}^3$. Altaaseen tulee ja altaasta lähtee vettä nopeudella $F = 1,5\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. Olkoon p_0 saapuvan veden suolapitoisuus. Saapuva vesi muuttaa altaan suolapitoisuutta nopeudella $(F/V)p_0$. Olkoon $x(t)$ altaan veden suolapitoisuus hetkellä t. Olkoon $x_0 = 3\%$ altaan suolapitoisuus hetkellä $t = 0$. Lähtevä vesi muuttaa altaan suolapitoisuutta hetkellä t nopeudella $-(F/V)x(t)$. Altaan suolapitoisuus muuttuu siis nopeudella

$$\dot{x}(t) = \frac{F}{V}p_0 - \frac{F}{V}x(t).$$

Saadaan lineaarinen alkuarvotehtävä

$$\dot{x}(t) + \frac{F}{V}x(t) = \frac{F}{V}p_0, \qquad x(0) = x_0.$$

Kertomalla yhtälö puolittain integroivalla tekijällä

$$\mu(t) = e^{\int (F/V)\,dt} = e^{(F/V)t}$$

saadaan yhtäpitävä yhtälö, joka ratkaistaan:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{(F/V)t}x(t)\right) = e^{(F/V)t}\frac{F}{V}p_0 \iff e^{(F/V)t}x(t) = e^{(F/V)t}p_0 + C \iff x(t) = p_0 + Ce^{-(F/V)t} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Sovitetaan alkuehto: $x_0 = p_0 + C \iff C = x_0 - p_0$. Alkuarvotehtävän ratkaisuksi saadaan

$$x(t) = p_0 + (x_0 - p_0)e^{-(F/V)t}.$$

Olemme kiinnostuneita ratkaisun käänteisfunktiosta

$$t = \frac{V}{F}\ln\frac{x_0 - p_0}{x(t) - p_0}.$$

Tässä on $V/F = 480/1,5\ \mathrm{min} = 320\ \mathrm{min}$.
(a) Tapauksessa $p_0 = 0\%$ hetki t, jolla $x(t) = 2\%$, on

$$t = 320\ln\frac{0,03-0}{0,02-0}\ \mathrm{min} = 320\ln\frac{3}{2}\ \mathrm{min} = 129,7488346\ \mathrm{min} \approx 2\ \mathrm{h}\ 10\ \mathrm{min}.$$

(b) Tapauksessa $p_0 = 1,5\%$ hetki t, jolla $x(t) = 2\%$, on

$$t = 320\ln\frac{0,03-0,015}{0,02-0,015}\ \mathrm{min} = 320\ln 3\ \mathrm{min} = 351,5559324\ \mathrm{min} \approx 5\ \mathrm{h}\ 52\ \mathrm{min}\ .$$

2. *Erään järven kalakannaksi laskettiin* 10000 *yksilöä vuonna* 1990 *ja* 5000 *yksilöä vuonna* 2000. *Mallinnetaan kalapopulaatiota* $p(t)$ *logistisella yhtälöllä* (2.9), $\dot{p}(t) = rp(t)(1 - p(t)/K)$. *Parametrin* r *arvoksi arvioidaan* $0,1$ *(kun ajan* t *yksikkö on vuosi), mutta ympäristön kantokykyä* K *ei tunneta.*

(a) *Ratkaise K;* **(b)** *ennusta kalakanta vuonna* 2010.

Ratk. Yhtälön autonomisuuden tähden vuosina mitattavan ajan t alkuhetkeksi $t = 0$ voidaan valita vuosi 1990. Nyt $p_0 = 10000$ on kannan koko hetkellä $t = 0$. Logistinen yhtälö (siinä $K > 0$) on Bernoullin yhtälö (myös separoituva), ja se toteuttaa OY-lauseen oletukset. Sillä on triviaaliratkaisut $p(t) \equiv 0$ ja $p(t) \equiv K$. Ratkaisuilla (mukaan lukien triviaaliratkaisut vastaten tapauksia $p_0 = 0$ ja $p_0 = K$) on luentojen mukaan kaava

$$p(t) = \frac{p_0 K}{p_0 + (K - p_0)e^{-rt}} \quad \forall t \geq 0$$

(luentojen ratkaisussa mahdollisesti ollut integroimisvakio on määritetty alkuehdon $p(0) = p_0$ avulla).

(a) Hetkellä $t_1 = 10$ on $p(t_1) = p_1 = 5000$ ja $e^{-rt_1} = e^{-0{,}1 \cdot 10} = e^{-1}$. Nyt

$$p_1 = \frac{p_0 K}{p_0 + (K - p_0)e^{-rt_1}} = \frac{1}{\frac{1}{K} + \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{K}\right) e^{-rt_1}} = \frac{1}{\frac{1}{K}(1 - e^{-rt_1}) + \frac{1}{p_0} e^{-rt_1}}$$

$$\iff \frac{1}{K}(1 - e^{-rt_1}) = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} e^{-rt_1} \iff K = \frac{1 - e^{-rt_1}}{1 - \frac{p_1}{p_0} e^{-rt_1}} p_1 = \frac{1 - e^{-1}}{1 - \frac{5000}{10000} e^{-1}} \cdot 5000 = 3873{,}001632 \approx 3873.$$

(b) Kalakanta vuonna 2010 eli hetkellä $t = t_2 = 20$ on mallin ennusteen mukaan

$$p(20) = \frac{K}{1 - \left(1 - \frac{K}{p_0}\right) e^{-rt_2}} = \frac{3873}{1 - \left(1 - \frac{3873}{10000}\right) e^{-2}} \approx 4223.$$

(Sama tulos olisi tullut, jos olisi käytetty pyöristämätöntä K:n arvoa.)

3. *Ratkaise AAT*

$$\dot{x} + 4tx = 2t\sqrt{x}, \quad x(0) = 1.$$

Ratk. Kyseessä on *Bernoullin yhtälö* $\dot{x} + 4tx = 2t\sqrt{x}$. Sillä on triviaaliratkaisu $x(t) \equiv 0$, joka ei kuitenkaan toteuta alkuehtoa. Etsitään positiiviset ratkaisut:

$$\dot{x} + 4tx = 2t\sqrt{x} \iff \frac{\dot{x}}{2\sqrt{x}} + 2t\sqrt{x} = t.$$

Tehdään tähän sijoitus $z(t) = \sqrt{x(t)} \iff x(t) = z(t)^2$, jolla on $\dot{z} = \dot{x}/(2\sqrt{x})$. Saadaan *lineaarinen* yhtälö $\dot{z} + 2tz = t$. Tällä on integroiva tekijä $\mu(t) = e^{\int 2t\,dt} = e^{t^2}$, joten

$$\dot{z} + 2tz = t \iff \frac{d}{dt}(e^{t^2} z) = te^{t^2} \iff e^{t^2} z = \tfrac{1}{2} e^{t^2} + C \ \ (C \in \mathbb{R}) \iff z(t) = \tfrac{1}{2} + Ce^{-t^2}.$$

Sovitetaan **heti** alkuehto: $x(0) = 1 \iff z(0) = 1 \iff 1 = \frac{1}{2} + C \iff C = \frac{1}{2} \iff z(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-t^2})$. Ratkaisuksi saadaan $x(t) = \frac{1}{4}(1 + e^{-t^2})^2$ $\forall t \in \mathbb{R}$. (Alkuehdon sovittaminen vasta x:lle antaisi vaihtoehdon $C = -3/2$, joka pitäisi osata hylätä.)

4. *Ratkaise AAT*

$$y' = ay - by^4, \quad y(0) = c,$$

jossa $a, b, c > 0$ ovat vakioita. Määritä lisäksi ratkaisun raja-arvo $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

Ratk. Kyseessä on Bernoullin yhtälö: $y' = ay - by^4 \iff y' - ay = -by^4$. Sillä on triviaaliratkaisu $y(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, joka ei kuitenkaan toteuta alkuehtoa. OY-lauseen oletukset ovat voimassa koko tasossa, joten muut ratkaisut ovat joko positiivisia tai negatiivisia. Alkuehdossa on $y(0) = c > 0$, joten etsitään positiiviset ratkaisut. Näille on $y' - ay = -by^4 \iff y^{-4}y' - ay^{-3} = -b$. Tehdään sijoitus

$$z(x) = y(x)^{-3} \iff y(x) = z(x)^{-1/3}; \quad z'(x) = -3y(x)^{-4}y'(x),$$

jolloin saadaan yhtäpitävä yhtälö $-z'/3 - az = -b \iff z' + 3az = 3b$, joka on lineaarinen. Sillä on integroiva tekijä $\mu(x) = e^{\int 3a\,dx} = e^{3ax}$. Tulee:

$$
\begin{aligned}
z' + 3az = 3b &\iff e^{3ax}z' + 3ae^{3ax}z = 3be^{ax} \iff \frac{d}{dx}(e^{3ax}z) = 3be^{3ax} \\
&\iff e^{3ax}z = \frac{b}{a}e^{3ax} + C \quad (C \in \mathbb{R}) \iff z(x) = \frac{b}{a} + Ce^{-3ax}.
\end{aligned}
$$

Otetaan alkuehto huomioon:

$$
y(0) = c \iff z(0) = c^{-3} \iff \frac{1}{c^3} = \frac{b}{a} + C \iff C = \frac{1}{c^3} - \frac{b}{a} \iff y(x) = \left(\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{c^3} - \frac{b}{a}\right)e^{-bax}\right)^{-1/3}.
$$

Jos $1/c^3 - b/a \geq 0$ eli jos $a/(bc^3) \geq 1$, niin $y(x)$ on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Jos taas $a/(bc^3) < 1$, niin ratkaisuvälin pisteille x tulee ehto

$$
\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{c^3} - \frac{b}{a}\right)e^{-3ax} > 0 \iff e^{-3ax} < \frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{a} - \frac{1}{c^3}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{bc^3}} \iff x > \frac{1}{3a}\ln\left(1 - \frac{a}{bc^3}\right),
$$

joten maksimaalisella ratkaisuvälillä on negatiivinen päätepiste. Ratkaisun raja-arvoksi saadaan

$$
\lim_{x\to\infty} y(x) = \left(\frac{b}{a} + 0\right)^{-1/3} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.
$$

5. *Tarkastellaan tartuntatautien* SIR*-mallia, tarkemmin sen paria* (2.16),

$$
\begin{aligned}
\frac{ds}{dt}(t) &= -\alpha R_0 s(t)i(t), \\
\frac{di}{dt}(t) &= \alpha R_0 s(t)i(t) - \alpha i(t).
\end{aligned}
$$

Oletetaan, että $0 < s(0), i(0) < 1$. *Osoita, että* $i(t), s(t) > 0$ *kaikilla* $t \geq 0$.

Ohje. *Voit pitää tunnettuna, että ratkaisu on olemassa välillä* $[0, \infty[$. *Olivatpa ratkaisufunktiot* $i(t)$ *ja* $s(t)$ *mitä hyvänsä, voit kiinnittää ne vuorollaan ja soveltaa OY-lausetta, Theorem* 1.2, *erikseen parin* (2.16) *yhtälöihin.*

Huom. 1. Yhtälöissä α ja R_0 ovat positiivisia vakioita (ja $R_0 > 1$). Ehdot $s(0) < 1$ ja $i(0) < 1$ on korvattava niitä vahvemmalla ehdolla $s(0) + i(0) \leq 1$, jotta oltaisiin SIR-mallissa (s on terveinä pysyneiden ja siis taudille alttiiden suhteellinen osuus sekä i tautia kantavien suhteellinen osuus vakiokokoisena säilyvästä populaatiosta; $r = 1 - s - i$ on taudin sairastaneiden ja siksi immuniteetin saaneiden suhteellinen osuus).

Huom. 2. OY-lause Theorem 1.2 ja vielä paremmin lineaarisen yhtälön ratkaisukaava todellakin riittävät tiettyyn mittaan asti, kuten osoitetaan. Mutta nämä eivät riitä AAT:n yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon osoittamiseen ja maksimaalisen ratkaisuvälin määrittämiseen, ja siksi aluksi käytetään DY-ryhmien OY-lausetta poistuvuuslause siihen mukaanlukien ([Martio–Sarvas, *Tavalliset differentiaaliyhtälöt*, Lause VII.3.3 ja Lauseen II.7.22 analogia] tai [Walter, *Ordinary differential equations*, Springer 1998, Existence and Uniqueness Theorem (s. 108)]; ks. myös luentomateriaalin Theorem 5.3 ja sen todistuksen jälkeinen kappale), jotka vektorimuotoon kootulle AAT:lle $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, ovat todistuksineen kuten Theorem 1.2 yhden skalaariyhtälön tapauksessa; jälleen poistuvuus tarkoittaa, että $(t, \mathbf{x}(t)) \to$ reuna.

Ratk. DY-parin määrittelevät funktiot $f\colon (t, s, i) \mapsto -\alpha R_0 si$ ja $g\colon (t, s, i) \mapsto \alpha R_0 si - \alpha i$ ovat jatkuvia $\mathbb{R}^3$:ssa ja niillä on jatkuvat osittaisderivaatat $\partial f/\partial s$, $\partial f/\partial i$, $\partial g/\partial s$ ja $\partial g/\partial i$, joten OY- ja poistuvuuslauseiden mukaan kullakin $(t_0, s_0, i_0) \in \mathbb{R}^3$ parin alkuarvotehtävällä $s(t_0) = s_0$ ja $i(t_0) = i_0$ on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $(s, i)\colon \Delta \to \mathbb{R}^2$ maksimaalisella välillä $]a, b[$ $(-\infty \leq a < t_0 < b \leq \infty)$, ja $\sqrt{t^2 + s(t)^2 + i(t)^2} \to \infty$, kun $t \to a+$ tai $t \to b-$. Täten, jos ratkaisufunktiot s ja i ovat rajoitettuja välillä $[t_0, b[$, niin $b = \infty$.

Olkoon nyt $t_0 = 0$, $s_0 > 0$, $i_0 > 0$ ja $s_0 + i_0 \leq 1$. Tutkitaan ratkaisuja s ja i välillä $\Delta = [0, b[$.

Huomataan, että mallin yhtälöt $(ds/dt)(t) = -\alpha R_0 i(t)s(t)$ funktiolle s ja $(di/dt)(t) = \alpha(R_0 s(t) - 1)i(t)$ funktiolle i ovat lineaarisia ja homogeenisia jatkuvin kerroinfunktioin, joten ratkaisemalla ne alkuehdoin $s(0) = s_0$ ja $i(0) = i_0$ vaikkapa integroivaa tekijää käyttämällä saadaan, että

$$s(t) = s_0 e^{-\alpha R_0 \int_0^t i(\tau)\, d\tau} \quad \forall t \in \Delta \qquad \text{ja} \qquad i(t) = i_0 e^{\alpha \int_0^t (R_0 s(\tau) - 1)\, d\tau} \quad \forall t \in \Delta.$$

Tästä seuraa, että $s(t) > 0$ ja $i(t) > 0$ $\forall t \in \Delta$.

Nyt $(d(s+i)/dt)(t) = (ds/dt)(t) + (di/dt)(t) = -\alpha i(t) < 0$ $\forall t \in \Delta$, joten välillä Δ funktio $s + i$ on aidosti vähenevä ja siis $s(t) + i(t) \leq s_0 + i_0 \leq 1$ $\forall t \in \Delta$. Täten $0 < s < 1$ ja $0 < i < 1$ välillä Δ. Näin ollen $b = \infty$.

Ohjeen mukaisesti. OY-lausetta Theorem 1.2 ei enää tarvittaisi, mutta ohjeen mukaisesti voisi menetellä seuraavasti. Olkoon (s, i) ratkaisupari välillä $\Delta = [0, \infty[$ ja $s(0) > 0$ sekä $i(0) > 0$. Olkoon $\Delta^* =]0, \infty[$, $D = \Delta^* \times \mathbb{R}$ ja $f(t, x) = -\alpha R_0 i(t)x$, kun $(t, x) \in D$. Tällöin f on jatkuva ja sillä on jatkuva osittaisderivaatta $(\partial f/\partial x)(t, x) = -\alpha R_0 i(t)$ alueessa D. Tällöin OY-lauseen oletukset pätevät yhtälölle $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ alueessa D. Yhtälöllä on ratkaisu $x = s|\Delta^*$. Mutta yhtälöllä on myös triviaaliratkaisu $x(t) = 0$ $\forall t \in \Delta^*$. Täten, jos $s(t) = 0$ jollain $t \in \Delta^*$, niin $s(t) = 0$ kaikilla $t \in \Delta^*$, jolloin s:n jatkuvuuden nojalla on myös $s(0) = 0$, mikä on vastoin oletusta $s(0) > 0$. Saadaan siis, että $s(t) > 0$ kaikilla $t \in \Delta$.

Samalla tavalla käyttämällä DY:n määrittelevää funktiota $g(t, x) = \alpha(R_0 s(t) - 1)x$ alueessa D voidaan osoittaa, että $i(t) > 0$ kaikilla $t \in \Delta$.

6. *Jatketaan tehtävää* 5*: osoita, että*

$$\textbf{(a)} \qquad \exists s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t) > 0, \qquad \textbf{(b)} \qquad \exists i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) > 0.$$

Ohje. *Sovella tehtävän* 5 *tulosta ja yhtälöä* (2.18), *lopuksi lemma* 2.1.

Ratk. Välillä $\Delta = [0, \infty[$ on $s > 0$ ja $i > 0$ tehtävän 5 mukaan ja siis $ds/dt = -\alpha R_0 si < 0$, joten s on aidosti vähenevä, ja on siis olemassa raja-arvo $s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t) \geq 0$.

Nähtiin, että $s+i$ on vähenevä välillä Δ, joten on olemassa raja-arvo $(s+i)_\infty = \lim_{t\to\infty}(s+i)(t) \geq 0$. Koska $i(t) = (s+i)(t) - s(t)$ $\forall t \in \Delta$, niin täten on olemassa myös raja-arvo $i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) = (s+i)_\infty - s_\infty \geq 0$.

Aidosti vähenevällä, jatkuvalla bijektiolla $t \mapsto s(t)$, $[0, \infty[\to]s_\infty, s_0]$, on aidosti vähenevä käänteiskuvaus $s \mapsto t(s)$, jolla on derivaatta $dt/ds = 1/(ds/dt)$. Täten $i(t)$:ssä voidaan aika t eliminoida s:n avulla. Merkitään i^*:llä näin saatua yhdistettyä funktiota $s \mapsto t(s) \mapsto i(t(s))$ välillä $]s_\infty, s_0]$, jolloin $i^*(s_0) = i_0$. Ketjusäännön mukaan i^*:llä on derivaatta

$$\frac{di^*}{ds} = \frac{di}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{di/dt}{ds/dt} = \frac{\alpha R_0 si - \alpha i}{-\alpha R_0 si} = -1 + \frac{1}{R_0}\frac{1}{s}.$$

Integroimalla tämä saadaan, että

$$i^*(s) = i_0 + \int_{s_0}^{s} \left(-1 + \frac{1}{R_0}\frac{1}{\sigma}\right) d\sigma = i_0 + s_0 - s + \frac{1}{R_0} \ln \frac{s}{s_0}, \quad \text{kun } s_\infty < s \leq s_0.$$

Tästä seuraa, että $s_\infty > 0$, sillä muutoin olisi $0 < i^*(s) \to -\infty$, kun $s \to s_\infty = 0$.

Nyt tästäkin nähdään, että on olemassa raja-arvo

$$i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) = \lim_{s\to s_\infty} i^*(s) = i_0 + s_0 - s_\infty + \frac{1}{R_0} \ln \frac{s_\infty}{s_0}.$$

On siis olemassa myös raja-arvo

$$(ds/dt)_\infty = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{ds}{dt}\right)(t) = -\alpha R_0 s_\infty i_\infty,$$

joten, koska s on rajoitettu välillä Δ (jopa $\exists \lim_{t\to\infty} s(t) = s_\infty \in \mathbb{R}$), niin $(ds/dt)_\infty = 0$ lemman 2.1 tähden. Koska $s_\infty > 0$, yhtälöstä $-\alpha R_0 s_\infty i_\infty = 0$ seuraa sitten, että $i_\infty = 0$.