Diff.yht. I, harj. 1, 11–12.9.2012, ratk. (Jouni Luukkainen), 4 sivua

1. *Nimeä, mitkä seuraavista ovat tavallisia differentiaaliyhtälöitä. Anna myös tuntematon funktio ja kertaluku.*

$$\textbf{(a)}\quad \ddot{x} = (t + x - 2)^3, \qquad \textbf{(b)}\quad xy + \sin(xy')^2 - 5y' = 1,$$
$$\textbf{(c)}\quad y = \frac{\partial z}{\partial x} - 2xy + yz, \qquad \textbf{(d)}\quad y'(x) = y(x^2).$$

Viimeisessä yhtälössä kaikki suluissa oleva on funktion argumenttia.

Ratk. (a) Kyseessä on normaalimuodossa oleva tavallinen differentiaaliyhtälö. Tuntematon funktio on $x = x(t)$ ja kertaluku 2. Siis $\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ funktiolla $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(t, u, v) \mapsto (t + u - 2)^3$.

(b) Kyseessä on tavallinen differentiaaliyhtälö, joka ei ole normaalimuodossa. Tuntematon funktio on $y = y(x)$ ja kertaluku 1. Yhtälö on muotoa $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ funktiolla $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(t, u, v) = tu + \sin(tv)^2 - 5v - 1$.

(c) Kyseessä on osittaisdifferentiaaliyhtälö, ei tavallinen differentiaaliyhtälö. Tuntematon funktio on $z = z(x, y)$ ja kertaluku 1. — Yhtälön lineaarisuuden ja osittaisderivaatan $\partial z/\partial y$ puuttumisen tähden yhtälö osattaisiin ratkaista tämän kurssin tiedoin: Kertomalla yhtäpitävä yhtälö $\partial z/\partial x + yz = (1 + 2x)y$ puolittain funktiolla (integroivalla tekijällä) e^{xy} saadaan yhtälö muotoon, josta voidaan määrittää sen ratkaisuiksi funktiot $z(x, y) = 1 + 2x - 2/y + C(y)e^{-xy}$ puolitasoissa $y > 0$ ja $y < 0$ kullakin (derivoituvalla) funktiolla $C = C(y)$ välillä $y > 0$ tai vastaavasti $y < 0$.

(d) Kyseessä ei ole (ainakaan tavanomainen) tavallinen differentiaaliyhtälö (eikä tietystikään osittaisdifferentiaaliyhtälö). Tuntematon funktio on $y = y(x)$ ja kertaluku 1. Yhtälöä ei (ilmeisestikään) voi saattaa muotoon $y'(x) = f(x, y(x))$ millään funktiolla f, sillä $y(x^2)$ riippuu muuttujan x neliöstä x^2. — Nollafunktio $y(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ toteuttaa yhtälön.

2. *Nimeä ja ratkaise seuraavista differentiaaliyhtälöistä separoituvat yhtälöt:*

$$\textbf{(a)}\quad y' = 2x - 2xy, \qquad \textbf{(b)}\quad y' = \cos(x - y), \qquad \textbf{(c)}\quad y' = 2x - 2y.$$

Ei tarvitse todistaa, että yhtälö ei ole separoituva.

Ratk. (a) Yhtälö voidaan saattaa muotoon $y' = 2x(1 - y)$, jossa oikea puoli on tulomuotoa $y' = p(x)q(y)$ jatkuvilla funktioilla $p, q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = 2x$ ja $q(y) = 1 - y$, joten yhtälö <u>on separoituva</u> tasossa $\mathbb{R}^2$. Koska $1 - y = 0 \iff y = 1$, yhtälöllä on triviaaliratkaisuna vakiofunktio $y(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Koska q on jatkuvasti derivoituva, ei OY-lauseen mukaan mikään muu ratkaisu saa arvoa 1, joten nämä ratkaisut löydetään ”separoimalla muuttujat”:

$$y' = 2x(1 - y) \text{ ja } y \neq 1 \iff \int \frac{dy}{1 - y} = \int 2x\,dx \iff -\ln|1 - y| = x^2 + C_0 \quad (C_0 \in \mathbb{R})$$
$$\iff |1 - y| = C_1 e^{-x^2} \quad (C_1 = e^{-C_0} > 0) \iff 1 - y = Ce^{-x^2} \quad (C = \pm C_1 \neq 0)$$
$$\iff y(x) = 1 - Ce^{-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Huomaa yllä itseisarvomerkkien poistoa varten, että koska ratkaisuvälillä funktio $x \mapsto 1 - y(x)$ on derivoituvana jatkuva eikä saa arvoa 0, niin Bolzanon lauseen mukaan se ei voi vaihtaa merkkiään vaan sillä on vakiomerkki. Huomaa myös, että vakioille C_0, C_1 ja C tulee vain ylle kirjoitetut rajoitukset (siis $C_1 > 0$, $C \neq 0$).

Sijoittamalla toisaalta saadussa kaavassa vakiolle arvo $C = 0$ saadaan parvesta raja-arvona $C \to 0$ triviaaliratkaisu $y(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Täten kaikki ratkaisut ovat $y(x) = \underline{1 - Ce^{-x^2}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ kullakin $C \in \mathbb{R}$.

(b) Yhtälö ei ole separoituva missään koordinaattiakselien suuntaisessa suorakulmiossa, sillä voidaan todistaa, että ei ole olemassa surkastumattomia välejä I ja J ja funktioita $f \colon I \to \mathbb{R}$ sekä $g \colon J \to \mathbb{R}$, joilla $\cos(x - y) = f(x)g(y)$ kaikilla $(x, y) \in I \times J$. — Myöhemmin opitaan, että vaihtamalla tuntematon funktio y

uudeksi tuntemattomaksi funktioksi z lausekkeella $z(x) = x - y(x)$ eli kääntäen $y(x) = x - z(x)$ saadaan yhtälö tällä *sijoituskeinolla* separoituvaan muotoon $z' = 1 - \cos z$.

(c) Yhtälö ei ole separoituva. — Yhtälö ratkaistaan tehtävässä 6.

3. *Ratkaise yhtälö*

$$1 + 2x - 2yy' = 0$$

alkuehdoilla

$$\textbf{(a)} \quad y(0) = -2, \qquad \textbf{(b)} \quad y(0) = 0.$$

Ratk. (a) Puolitasoissa $y \gtrless 0$ yhtälö on separoituva, sillä sille saadaan yhtäpitävä muoto $y' = (1+2x)/(2y)$. Koska alkuehdossa on $y(0) = -2 < 0$, ratkaistaan alkuarvotehtävä aluksi vain puolitasossa $y < 0$:

$$y' = \frac{1+2x}{2y} \iff \int 2y\,dy = \int (1+2x)\,dx \iff y^2 = x + x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Nyt $y(0) = -2 \iff (-2)^2 = 0 + 0^2 + C \iff C = 4$. Saadaan implisiittinen ratkaisu $y(x)^2 = x + x^2 + 4$. Koska $x + x^2 + 4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, eksplisiittinen ratkaisu on $y(x) = \underline{-\sqrt{x^2 + x + 4}}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koska ratkaisu on jo määritelty kaikkialla, sitä ei voi laajentaa ratkaisuksi, jolla olisi arvo 0. Täten alkuarvotehtävällä ei ole muita ratkaisuja (kuin tästä väleihin $I \ni 0$ rajoittamalla saadut).

(b) Alkuehdolla $y(0) = 0$ ei yhtälöllä ole ratkaisuja, sillä jos jollain pisteen $x = 0$ sisältävällä välillä I olisi olemassa derivoituva funktio $y = y(x)$, jolle pätisi $1 + 2x - 2y(x)y'(x) = 0$ kaikilla $x \in I$ ja jolla $y(0) = 0$, niin kohdassa $x = 0$ saataisiin, että $1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 y'(0) = 0$ ja siis $1 = 0$; RR.

Huom. Katsotaanpa, kuinka käy, jos kuitenkin yrittää ensin ratkaista alkuarvotehtävän sijoittamalla $x = 0$ ja $y = 0$ kaavaan $y^2 = x + x^2 + C$, jolloin tulee $C = 0$ ja siis $y(x)^2 = x + x^2$. Koska $x + x^2 = x(1+x) \geq 0 \iff x \leq -1$ tai $x \geq 0$, niin tällöin on oltava $x \geq 0$ ja $y(x) = \sqrt{x + x^2}\ \forall x \geq 0$ tai $y(x) = -\sqrt{x + x^2}\ \forall x \geq 0$. Mutta silloin $y'(0+)$ ei ole määritelty (vaan $y'(0+) = \infty$ tai vastaavasti $y'(0+) = -\infty$).

4. *Ratkaise alkuarvotehtävä*

$$y' = (y-2)(y-1), \qquad y(0) = 0.$$

Mitkä on maksimaalinen ratkaisuväli?

Ratk. Yhtälö on separoituva, ja, koska polynomin $(y-2)(y-1)$ nollakohdat ovat 2 ja 1, sillä on triviaaliratkaisut $y(x) = 2\ \forall x \in \mathbb{R}$ ja $y(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$. Muut ratkaisut, kuten erityisesti tehtävän alkuehdon toteuttava(t), eivät saa näitä arvoja. Etsitään ne separoimalla (yksi tapa löytää tarvittava osamurtohajotelma annetaan alempana):

$$\begin{aligned}
&y' = (y-2)(y-1) \iff \int \frac{dy}{(y-2)(y-1)} = \int dx \overset{(0)}{\iff} \int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y-1}\right) = x + C_0 \quad (C_0 \in \mathbb{R}) \\
&\iff \ln|y-2| - \ln|y-1| = x + C_0 \iff \ln\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = x + C_0 \iff \left|\frac{y-2}{y-1}\right| = C_1 e^x \quad (C_1 = e^{C_0} > 0) \\
&\iff \frac{y-2}{y-1} \overset{(1)}{=} Ce^x \quad (C = \pm C_1 \neq 0) \iff 1 - \frac{1}{y-1} = Ce^x \iff y(x) \overset{(2)}{=} 1 - \frac{1}{Ce^x - 1} \quad (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).
\end{aligned}$$

Yllä kohdassa (0) käytettiin tietoa, että muotoa $1/((y-2)(y-1))$ olevalla lausekkeella on osamurtohajotelma muotoa

$$\frac{1}{(y-2)(y-1)} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y-1} \qquad \text{joillain vakioilla } A, B \in \mathbb{R}.$$

(Tämä tieto todistetaan kompleksianalyysin kurssilla, mutta yksittäistapauksissa se voidaan aina osoittaa paikkansapitäväksi antamalla oikeat vakiot A ja B!) Ajatellaan yhtälö kerrotuksi puolittain lausekkeella $y - 2 \neq 0$ (tai vastaavasti lausekkeella $y - 1 \neq 0$), jolloin rajalla $y \to 2$ (tai vastaavasti rajalla $y \to 1$) saadaan

$$A = \lim_{y \to 2} \frac{1}{y-1} = \frac{1}{2-1} = 1, \qquad B = \lim_{y \to 1} \frac{1}{y-2} = \frac{1}{1-2} = -1.$$

Yllä kohdassa (0) havaittiin päässälaskulla, että nämä vakiot A ja B todellakin sitten toimivat.

Nyt $y(0) = 0 \iff \dfrac{0-2}{0-1} \overset{(1)}{=} Ce^0 \iff C = 2$. Täten alkuarvotehtävän ratkaisuksi saadaan

$$y(x) \overset{(2)}{=} 1 - \frac{1}{2e^x - 1}.$$

Tässä $2e^x - 1 = 0 \iff x = \ln(1/2) = -\ln 2$. Lisäksi alkuehdossa on $x = 0 > -\ln 2$. Täten maksimaaliseksi ratkaisuväliksi saadaan $]-\ln 2, \infty[$ (sillä funktiota y ei voida laajentaa edes jatkuvaksi funktioksi pisteeseen $x = -\ln 2$, koska $y(x) \to -\infty$, kun $x \to -\ln 2$ oikealta).

5. *Takaako* OY-*lause*, Theorem 1.2, *yksikäsitteisen ratkaisun alkuarvotehtävälle*

(a) $y' + \cos^3 y = \sin^4 x, \quad y(\pi) = 0,$ **(b)** $y' + \cos^3 y = \sqrt{\sin x}, \quad y(\pi) = 0,$
(c) teht. **3 a**, **(d)** teht. **3 b**?

Ratk. **(a)** Nyt $y' + \cos^3 y = \sin^4 x \iff y' = \sin^4 x - \cos^3 y$. Yhtälön normaalimuodon määrittelevä funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sin^4 x - \cos^3 y$, on jatkuva ja sillä on jatkuva osittaisderivaatta $\partial f/\partial y = 3\cos^2 y \sin y$ koko $\mathbb{R}^2$:ssa. Siis takaa.

(b) Yhtälöä vastaavan normaalimuotoisen yhtälön määrittelevä funktio $f\colon (x, y) \mapsto \sqrt{\sin x} - \cos^3 y$ on määritelty ja jatkuva suljetuissa vöissä $[2n\pi, (2n+1)\pi] \times \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{Z})$, joissa sillä on jatkuva osittaisderivaatta $\partial f/\partial y = 3\cos^2 y \sin y$. Mutta alkuehtopiste $(x, y) = (\pi, 0)$ on vyön $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ reunapiste, ei sisäpiste. Siksi lokaali OY-lause (Theorem 1.2) ei toimi tälle alkuarvotehtävälle suoraan. Siis ei takaa. Mutta katsotaan, kuinka sittenkin saataisiin myönteinen vastaus. Tätä varten on ensin johdettava uusi alkuarvotehtävä.

Määritellään funktio $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{\sin x}, & \text{kun } 2n\pi \le x \le (2n+1)\pi \text{ jollain } n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{kun } (2n-1)\pi \le x \le 2n\pi \text{ jollain } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Tällöin φ on jatkuva. Siis funktio $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \varphi(x) - \cos^3 y$, on funktion f jatkuva laajennus koko tasoon, ja sillä on jatkuva osittaisderivaatta $\partial g/\partial y = 3\cos^2 y \sin y$ koko tasossa. Täten lokaalin OY-lauseen olemassaolopuolen (Theorem 1.2 (a)) mukaan uudella alkuarvotehtävällä $y' = g(x, y)$, $y(\pi) = 0$, on ratkaisu y_0 jollain avoimella välillä I; tämän ratkaisun rajoittuma välille $I \cap [0, \pi]$ on tällöin alkuperäisen alkuarvotehtävän ratkaisu. Toisaalta, jos y_i on alkuperäisen alkuarvotehtävän ratkaisu jollain välillä $J_i \subset I \cap [0, \pi]$, kun $i = 1, 2$, niin y_i on samalla uuden alkuarvotehtävän ratkaisu välillä J_i, kun $i = 1, 2$, joten lokaalin OY-lauseen yksikäsitteisyyspuolen (Theorem 1.2 (b)) mukaan $y_1(x) = y_0(x) = y_2(x)$ kaikilla x välillä $J_1 \cap J_2$. Tätä kautta vastaus tehtävän kysymykseen on: takaa.

(c) Yhtälöllä $1 + 2x - 2yy' = 0$ on normaalimuoto $y' = \dfrac{1+2x}{2y}$ puolitasoissa $y \gtrless 0$, joissa normaalimuodon määrittelevä funktio f ja osittaisderivaatta $\partial f/\partial y$ ovat jatkuvia. Nyt alkuehdossa on $y(0) = -2 < 0$. Vastaus: takaa. Yllä kyseinen ratkaisu määritettiin.

(d) Alkuehtopiste $(0, 0)$ on puolitasojen $y \gtrless 0$ yhteisellä reunalla, suoralla $y = 0$. Siis ei takaa. Yllä nähtiin, että alkuarvotehtävällä ei ole yhtään ratkaisua. Huomaa, että nyt $|(\partial f/\partial y)(x, y)| \to \infty$, kun $(x, y) \to (0, 0)$.

6. *Mitä tyyppiä on yhtälö kohdassa* **2 c**, *siis* $y' = 2x - 2y$? *Ratkaise se.*

Ohje. Lopuksi osittaisintegrointi.

Ratk. Yhtälö on lineaarinen. Sen standardimuoto on $y' + 2y = 2x$ eli $y' + p(x)y = q(x)$ funktioin $p(x) = 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ja $q(x) = 2x$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Määritetään integroiva tekijä (kaava on ainoa, joka tarvitsee muistaa, ja joka tapauksessa alla tulon derivointikaava osoittaa, että määritys on oikea):

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int 2\,dx} = e^{2x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kertomalla yhtälö puolittain integroivalla tekijällä saadaan yhtäpitävä differentiaaliyhtälö, joka ratkaistaan integraalifunktion määritelmää käyttäen; muodostuva integraali lasketaan osittaisintegroinnilla:

$$
\begin{aligned}
y' + 2y = 2x \iff e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 2xe^{2x} \iff \frac{d}{dx}\big(e^{2x}y(x)\big) = 2xe^{2x} \\
\iff e^{2x}y(x) = \int 2xe^{2x}\,dx = \int x\cdot 2e^{2x}\,dx = xe^{2x} - \int 1\cdot e^{2x}\,dx = xe^{2x} - \tfrac{1}{2}e^{2x} + C \quad (C\in\mathbb{R}) \\
\iff y(x) = \underline{x - \tfrac{1}{2} + Ce^{-2x}} \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad (C\in\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Huom. On tärkeätä huomata integroimisvakio C oikeassa paikassa. Valmista lineaarisen yhtälön ratkaisun monimutkaista ja helposti väärin muistettavaa kaavaa ei pidä käyttää, vaan juuri yllä olevaa menetelmää (ellei sitten käytä vastaavan homogeenisen yhtälön yleisen ratkaisun $Ce^{-\int p(x)\,dx} = Ce^{-\int 2\,dx} = Ce^{-2x}$ määrittämisen jälkeen integroinnit välttävää yritettä, nyt muotoa $y(x) = Ax + B$ olevaa, täyden eli epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisun löytämiseksi).