Diff. yhtälöt I, harj. 2, syksy 2012
(ratk, T.H.)

1. yhtälöt a) & b) ovat lineaarisia.

a) $y' + 2y/x = 4x \iff y' + \underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)} y = 4x \quad (*)$
$x \neq 0$

Integroiva tekijä: $\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right)$

$= \exp\left(\int \frac{2}{x}\,dx\right) = \exp(2\ln|x|) = \exp(\ln x^2) = x^2$,
jolla kertomalla

$(*) \iff 4x^3 = x^2 y' + 2xy = \frac{d}{dx}(x^2 y)$

$\iff x^2 y = \int 4x^3\,dx = x^4 + C \iff \underline{\underline{y = x^2 + Cx^{-2}}}$
$\underline{\underline{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}}$.

b) $y' + \underbrace{(\cos x)}_{= p(x)} y = -\cos x \quad (**)$

Int. tekijä: $\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right)$

$= \exp \int \cos x\,dx = e^{\sin x}$ & $(**) \Rightarrow$

$(-\cos x)e^{\sin x} = y' e^{\sin x} + y(\cos x)e^{\sin x}$

$= \frac{d}{dx}\left(y e^{\sin x}\right)$

$\iff y e^{\sin x} = \int (-\cos x) e^{\sin x}\,dx = -e^{\sin x} + C$

$\iff \underline{\underline{y = -1 + Ce^{-\sin x}}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(missä $Ce^{-\sin x}$ on HY:n yl. ratk.)

2. $\underbrace{(2y+3)}_{M} + \underbrace{(2x-2)}_{N}y' = 0 \quad (*)$

1° $M, N \in C^1(\mathbb{R}^2)$ &

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 = \frac{\partial N}{\partial x} \implies$ DY on eksakti.

$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) = \int (2y+3)\,dx + g(y)$

$= (2y+3)x + g(y)$

$\implies \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + g'(y) = N = 2x - 2 \implies g'(y) = -2,$

kun $g(y) = -2y$

$\implies$ Implisiittiratk. on $F(x,y) = (2y+3)x - 2y = C \quad (**)$

(Tark. $\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = \partial_x F + \partial_y F \cdot y' = (2y+3) + (2x-2)y'$
$= \frac{d}{dx}C = 0 \iff (*)$)

2° $(*) \overset{x \neq 1}{\iff} y' = \frac{2y+3}{2x-2} = -\frac{y+\frac{3}{2}}{x-1}$ (separoituva)

$\iff \int (y+\tfrac{3}{2})^{-1}\,dy = -\int (x-1)^{-1}\,dx$

Triv. ratk. $y + \frac{3}{2} = 0 \iff y = -\frac{3}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\iff \ln|y+\tfrac{3}{2}| = -\ln|x-1| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$

$\iff |y+\tfrac{3}{2}| = |x-1|^{-1} \cdot \underbrace{e^{C_1}}_{>0} \iff y + \tfrac{3}{2} = C_2(x-1)^{-1}, \quad C_2 \neq 0$

$\iff (y+\tfrac{3}{2})(x-1) = C_2 \quad (***)$

$\iff (2y+3)(x-1) = C_3, \; C_3 = 2C_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \; x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Lisäksi: triv. ratk. $y = -\frac{3}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

($\iff C_3 = (2y+3)x - 2y - 3 \iff (2y+3)x - 2y = C_3 + 3$

$\iff (**)$, kun $C = C_3 + 3$

Jos valitaan (vastoin kiellettyä arvoa $C_3 = 0$)

$C = 0 + 3 = 3$, $(**) \iff (2y+3)x - 2y = 3$

$\iff (2y+3)(x-1) = 0$ (vrt. $(***)$, sillä $C_3 = 0 \iff C_2 = 0$)

$\iff x = 1$ t. $y = -\frac{3}{2}$, siis e.m. triv. ratk.).

3° (1 kl.) lin. DY

$$(*) \Longleftrightarrow (2x-2)y' + 2y = -3$$

$$\Longleftrightarrow y' + \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{p(x)} y = \frac{-3}{2x-2} \quad (**),$$

kun $x \neq 1$.

Integroiva tekijä

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right) = \exp\left(\int \frac{1}{x-1}\,dx\right)$$

$$= \exp\left(\ln|x-1|\right) = |x-1|.$$

Val. $\mu(x) = x-1$, jolloin

$$(**) \Longleftrightarrow (x-1)y' + y = -\frac{3}{2} \quad (\text{kun } x \neq 1).$$

$$\Longleftrightarrow \frac{d}{dx}\left((x-1)y\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\Longleftrightarrow (x-1)y = -\frac{3}{2}x + C$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{-3x}{2x-2} + \frac{C}{x-1}, \quad C \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$(\Longleftrightarrow 2xy - 2y = -3x + C$$

$$\Longleftrightarrow (2y+3)x - 2y = C \Longleftrightarrow (**) \ 1^\circ\text{:ssä}.$$

Huom. (**) pätee myös, kun $x = 1$.)

3. $(x-2)y' - y = 2(x-2)^3 \quad (I)$

$\iff y' \underbrace{-(x-2)^{-1}}_{p(x)} y = 2(x-2)^2 \quad (II)$, kun $x \neq 2$.

Tämä on 1. kl. lin. DY.

Int. tekijä:

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right) = \exp\left(-\int (x-2)^{-1}dx\right)$$

$$= \exp(-\ln|x-2|) = \exp(\ln|x-2|^{-1}) = |x-2|^{-1} = \pm(x-2)^{-1}.$$

Val. esim. $\mu(x) = +(x-2)^{-1}$, jolloin $(II) \iff$

$$(x-2)^{-1}y' - (x-2)^{-2}y = 2(x-2)$$

$$\iff \frac{d}{dx}\left((x-2)^{-1}y\right) = 2(x-2) \iff (x-2)^{-1}y = \int 2(x-2)\,dx$$

$$= (x-2)^2 + C \iff y = (x-2)^3 + C(x-2) \quad (III)$$

$$\Rightarrow y' = 3(x-2)^2 + C \quad (III')$$

Sij. (III) & (III') (I):een

$$\Rightarrow (x-2)\left(3(x-2)^2 + C\right) - \left((x-2)^3 + C(x-2)\right)$$

$$= 3(x-2)^3 + C(x-2) - (x-2)^3 - C(x-2) = 2(x-2)^3$$

$\Rightarrow (III)$ on (I):n ratk. $\forall x \in \mathbb{R}$ (siis myös, kun $x = 2$), sillä:

(III):lle pätee: $y(2) = 0$ & $y'(2) = C$

& (III) $\lim_{x \to 2\pm} y(x) = 0$

Jos olisi $y = (x-2)^3 + C_1(x-2),\ x \geq 2$

$y = (x-2)^3 + C_2(x-2),\ x \leq 2$

niin

$$y' = \frac{d}{dx}\left((x-2)^3 + C_i(x-2)\right) = 3(x-2)^2 + C_i,\ i = 1, 2$$

$\Rightarrow C_1 = y'(2+)$ & $C_2 = y'(2-)$ & $y'(2) \exists$ jos $y'(2+) = y'(2-)$, jolloin $y'(2) = C_1 = C_2 =: C$.

Siis liimaamalla ratkaisut $(x<2$ & $x>2)$ saadaan ratkaisu III $\forall x \in \mathbb{R}$ kullakin $C \in \mathbb{R}$. (mutta ei muita ratkaisuja).

a) $y(0)=0$:
$(I) \Leftrightarrow y' = (x-2)^{-1} y + 2(x-2)^2 =: f(x,y)$
$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = (x-2)^{-1} \Rightarrow f$ & $\frac{\partial}{\partial y} f$ ovat jatkuvia

alueessa $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2\}$ & $(0, y(0)) = (0,0) \in D$
joten OY-lause $\Rightarrow$ AAT:llä $\exists$ 1-käs. ratk jollakin avoimella välillä Δ s.e. $0 \in \Delta$
Siis: $y(0)=0$ III:een
$\Rightarrow 0 = (0-2)^3 + C\cdot(0-2) \Leftrightarrow C = -4$
$\Rightarrow y = (x-2)^3 - 4(x-2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Siis 1-käs. ratk koko $\mathbb{R}$:ssä, mikä ei ole ristiriidassa OY-lauseen kanssa.

b) $y(2)=0$: III $\Rightarrow y(2) = (2-2)^3 + C(2-2) = 0$
$\forall C \in \mathbb{R}$.
Siis AAT b):llä on äärettömän monta ratkaisua ((III) $\forall C \in \mathbb{R}$).
Tämä ei ole ristiriidassa OY-lauseen kanssa, sillä
$f(2,y)$ & $\frac{\partial}{\partial y} f(2,y)$ (ks. a)) eivät ole edes

määriteltyjä.

c) $y(2)=1$: III $\Rightarrow y(2) = \ldots = 0$
$\Rightarrow 1 = 0$. R.R.
$\Rightarrow$ AAT:llä c) ei ole ratkaisua.
Ei ristiriitaa OY-lauseen kanssa.
(ks. b)).

4. $$\underbrace{y^{-1}}_{M(x,y)} + \underbrace{(2y - xy^{-2})}_{N(x,y)}y' = 0 \qquad (*)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -y^{-2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lisäksi $M, N \in C^1(D_+)$, missä
$D_+ = \{(x,y) \mid y>0\}$ & $D_- = \{(x,y) \mid y<0\}$

$\Rightarrow$ DY on eksakti puolitasoissa D_+ & D_-.

Potentiaali

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) = \int y^{-1}\,dx + g(y)$$

$$= xy^{-1} + g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^{-1} + g(y)\right) = -xy^{-2} + g'(y) = N(x,y)$$

$$= 2y - xy^{-2}$$

$\Leftrightarrow$ $g'(y) = 2y$,
kun $g(y) = y^2$

$\Rightarrow$ Implisiittiratk. on

$$F(x,y) = xy^{-1} + y^2 = C \quad, \text{kun } y \neq 0.$$
$$\Leftrightarrow \quad x = Cy - y^3$$

Ol., että y on ratk. välillä $\Delta \Rightarrow \exists\, C \in \mathbb{R}$ s.e.
$x = Cy(x) - y(x)^3 \quad \forall x \in \Delta$

Nyt $x_1, x_2 \in \Delta$ & $y(x_1) = y(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Siis y on injekt. & siis bij. välille $\Delta' = y(\Delta)$
Välin jva inj. on aidosti monot. & sillä on
siis käänteiskuvaus $y \mapsto x$, $\Delta' \to \Delta$,
$$x(y) = Cy - y^3 \quad \forall y \in \Delta'.$$

5. 1° $2x+3+(2y-2)y' = 0 \overset{y\neq 1}{\iff} y' = -\frac{2x+3}{2y-2}$
separoituva

$\iff 2x+3 = (2-2y)\frac{dy}{dx} \iff \int 2x+3\,dx = \int 2-2y\,dy$

$\iff x^2+3x+C = 2y-y^2$

$\iff x^2+3x+y^2-2y = -C \iff (x+\frac{3}{2})^2+(y-1)^2-(\frac{3}{2})^2-1^2 = -C$

$\iff \underbrace{(x+\frac{3}{2})^2+(y-1)^2}_{\geq 0} = \frac{13}{4}-C,\quad (x,y)\in\mathbb{R},\ y\neq 1.$

– Oltava $\frac{13}{4} > C$, jolloin saadaan ympyrän kaaria

2° $\underbrace{(2x+3)}_{M} + \underbrace{(2y-2)}_{N}y' = 0$

$M, N \in C^1(\mathbb{R}^2)$ & $\frac{\partial M}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\Rightarrow$ DY on eksakti koko $\mathbb{R}^2$:ssa.

$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) = x^2+3x+g(y)$

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = g'(y) = N = 2y-2$, kun $g(y) = y^2-2y$

$\Rightarrow$ Impl. ratk. on

$$x^2+3x+y^2-2y = C$$

$\iff (x+\frac{3}{2})^2+(y-1)^2 = C+\frac{13}{4}$

– Oltava $C > -\frac{13}{4}$.

– Oltava $y\neq 1$, jotta ei pystysuoria tangentteja (kr. 1°).

6. (*) $\underbrace{y^2}_{=:M} + \underbrace{(y^3 - xy)}_{=:N}\, y' = 0$

Polynomeina $M(x,y), N(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq -y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

($2y = -y \iff y = 0$: Siis $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ pätee $\mathbb{R}^2$:ssa vain x-akselilla – ei siis missään suorakaiteen muotoisessa alueessa. (Alue on määritelmänsä mukaan avoin, epätyhjä, yhtenäinen joukko.))

Siis L 1.10. $\Rightarrow$ (*) ei ole eksakti.

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{y^2}(-y - 2y) = -3/y =: g(y)$$

riippuu vain y:stä, joten L 1.11. mukaan (*):lla on int. tekijä

$$\mu(y) = \exp\left(\int g(y)\,dy\right) = \exp\left(-3\int \frac{1}{y}\,dy\right)$$

$$= \exp(-3\ln|y|) = |y|^{-3}$$

Voidaan val. $\mu(y) = y^{-3}$ (vrt. Esim. 1.13.)
Alueissa

$D_+ = \{(x,y) \mid y > 0\}$ & $D_- = \{(x,y) \mid y < 0\}$

saadaan (*):n kanssa yhtäpitävä yhtälö

(**) $\underbrace{y^{-1}}_{=:\tilde{M}} + \underbrace{\left(1 - \frac{x}{y^2}\right)}_{=:\tilde{N}} y' = 0$

(Tark. $\frac{\partial}{\partial y}\tilde{M} = -y^{-2} = \frac{\partial}{\partial x}\tilde{N} \Rightarrow$ (**) on eksakti D_+:ssa & D_-:ssa)

Potentiaali

$$F(x,y) = \int \tilde{M}\,dx + \varphi(y) = \int y^{-1}\,dx + \varphi(y)$$

$$= x/y + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} F = -xy^{-2} + \varphi'(y) = \tilde{N} = 1 - xy^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(y) = 1 \Rightarrow \varphi(y) = y$$

$\Rightarrow$ (*):n & (**):n implisiittiratk., kun $y \neq 0$, on

$$(***) \quad F(x,y) = xy^{-1} + y = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Kun $y = 0$: $y \equiv 0$ on selvästi (*):n ratk.

(Tark. vielä:

$$0 = \frac{d}{dx} C = \frac{d}{dx} F(x, y(x)) = \frac{\partial}{\partial x} F + \frac{\partial}{\partial y} F \frac{d}{dx} y$$

$$= y^{-1} + (-xy^{-2} + 1) y' = \tilde{M} + \tilde{N} y'$$

$$\left(\Leftrightarrow 0 = y^{-1} + (1 - xy^{-2}) y' \;\middle|\; \cdot y^3 \right.$$

$$\left. \Leftrightarrow 0 = y^2 + (y^3 - xy) y' \Leftrightarrow (*) \right) \Big)$$

$$(***) \Leftrightarrow y^2 - 2 \cdot \tfrac{1}{2} C y + x = 0 \Leftrightarrow x = \left(\tfrac{1}{2} C\right)^2 - \left(y - \tfrac{1}{2} C\right)^2 \quad (****)$$

Paraabeli origon kautta paitsi kärkipiste, jossa $y = \frac{1}{2} C \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2} C\right)^2$, sillä $(****) \Rightarrow$

$$1 = \frac{d}{dx} x = -2\left(y - \tfrac{1}{2} C\right) y' \Rightarrow y' = -\frac{1}{2\left(y - \frac{1}{2} C\right)} \to \infty$$

kun $y \to \frac{1}{2} C$.

Siis kun $C \neq 0$ saadaan origon kautta kulkeva paraabeli. Kun $C = 0$, origo on paraabelin kärki eikä kuulu ratkaisuun (***).