Institutionen för matematik och statistik
Analys I
Uppgifter för vecka 47 (19.11-23.11.2012)

I följande uppgifter behandlas frågor angående funktioners deriverbarhet. Det centrala temat är ”karakteriseringssatsen” som ger en ny synvinkel på deriverbarhet. Deriveringsregler samt egenskaper för kända funktioner från gymnasiet som t.ex kontinuerlighet får användas. (Påminn dig alltså om deriveringsreglerna från gymnasiematematiken!)

Uppgifter för början av veckan

O1. Låt oss definiera $f(x) = x^2$. Visa att

$$f(1+h) = f(1) + 2h + h^2.$$

Kan vi direkt från detta läsa ut funktionens derivata i punkten $x = 1$?

O2. Låt oss definiera $f(x) = x^2$. Skriv förändringen hos funktionen som

$$f(1+h) = f(1) + 7h + h\alpha(h) = 1 + 7h + h\alpha(h).$$

Är resultatet en motstridighet med karakteriseringssatsen?

K1. Derivera
(a) $\cos^3 x^4$
(b) $\sin^2(\cos^3 x^4)$
(c) $\sqrt{\sin^2(\cos^3 x^4) + 1}$
Det lönar sig att komma ihåg deriveringsregeln för sammansatta funktioner!

K2. Låt oss definiera funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som $f(x) = x|x|$. För vilka x existerar derivatan $f'(x)$? Hur är det med andra derivatan $f''(x)$? Tredje derivatan $f'''(x)$?

K3. Anta att $f'(1) = 4$. Utred gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h}.$$

Tips: komplettera uttrycket till en form där differenskvoterna

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \text{ och } \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}$$

förekommer.

Uppgifter för slutet av veckan

O3. Anta att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[1, 3]$ och deriverbar i intervallet $]1, 3[$. Anta även att för alla $x \in]1, 3[$ gäller att $1 < f'(x) < 4$. Vad vet vi om värdet $f(3)$ om $f(1) = 1$? Hur kan du motivera resultatet användes kursens innehåll?

O4. Härledning av produktregeln för derivatan (också kallad Leibniz regel) genom att tillämpa karakteriseringssatsen. Anta att funktionerna f och g är deriverbara i punkten x. Då gäller

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + h\epsilon_1(h)$$

och

$$g(x + h) = g(x) + g'(x)h + h\epsilon_2(h)$$

enligt karakteriseringssatsen, där $\epsilon_1(h) \to 0$ och $\epsilon_2(h) \to 0$ då $h \to 0$. Bearbeta produkten

$$(f(x) + f'(x)h + h\epsilon_1(h))(g(x) + g'(x)h + h\epsilon_2(h))$$

och härled deriverbarheten av produkten fg i punkten x samt Leibniz regel.

K4. Låt oss definiera funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som $f(x) = \sqrt{x}$ då $x \geq 0$ och som $f(x) = -\sqrt{-x}$ då $x < 0$. Var är f deriverbar?

K5. Vi undersöker funktionen $f(x) = x^5$. Tolka ekvationen

$$(a + h)^2 = a^5 + 5a^4h + 10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5$$

med hjälp av karakteriseringssatsen. Vad är $f(a)$, $f'(a)h$ och $h\epsilon(h)$ i denna ekvation? Kan funktionens derivata i punkten $x = a$ läsas direkt från ekvationen?

K6. Anta att $p > 0$. Visa att ekvationen

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

har högst två olika reella rötter. Tips: Beteckna ekvationens vänstra sida som $= f(x)$. Kom ihåg Rolles sats och medelvärdessatsen!