Institutionen för matematik och statistik
Analys I
Uppgifter för vecka 44 (29.10-2.11.2012)

Andra perioden börjar med vidare behandling av gränsvärdet för funktioner.

Uppgifter för början av veckan

O1. Visa med hjälp av gränsvärdets definition för funktioner att

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$$

gäller.

O2. Visa med hjälp av gränsvärdets definition för funktioner att

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{2x+1} = 1$$

inte gäller.

K1. Visa med hjälp av gränsvärdets definition för funktioner att

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{4}{7}$$

gäller.

K2. Är funktionen $f(x) = |x|$ deriverbar i punkten $x = 0$? Motivera noggrant med hjälp av definitionerna för deriverbarhet och gränsvärdet för funktioner!

K3. Visa med hjälp av gränsvärdets definition för funktioner att funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ är kontinuerlig i punkten $x = 16$.

Uppgifter för slutet av veckan

O3. Visa med hjälp av gränsvärdets definition för funktioner samt definitionen för deriverbarhet att funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ är deriverbar i punkten $x = 16$ och att $f'(16) = \frac{1}{8}$.

O4. Låt funktionen $f\colon (1,4) \to \mathbb{R}$ vara definierad som

$$f(x) = \frac{x+1}{2x+1}.$$

Visa med hjälp av gränsvärdets definition för funktioner samt definitionen för deriverbarhet att funktionen f är deriverbar i punkten $x = 3$ och att $f'(3) = -\frac{1}{49}$.

K4. Visa med hjälp av gränsvärdets definition för funktioner att

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = 1$$

inte gäller.

K5. Anta att funktionen g satisfierar olikheten $|g(x)| < 7$ för alla $x \in (-1,1)$. Visa att funktionen $f(x) = x^2 g(x)$ är deriverbar i punkten $x = 0$ och att $f'(0) = 0$. Tips: undersök differenskvotens avstånd från talet 0.
(Obs. Det kan t.ex gälla att $g(x) = 0$ då x är rationellt och $g(x) = 1$ då x är irrationellt. En funktion kan alltså enligt resultatet i uppgiften vara deriverbar i en punkt och diskontinuerlig i alla andra punkter.)

K6. Anta att $h > 0$ och att funktionen f är definierad för alla $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$, samt att $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$ där $b \neq 0$. Visa att det existerar ett $\delta > 0$ för vilket det gäller att $\frac{1}{2}|b| < |f(x)| < \frac{3}{2}|b|$ för alla $x \neq x_0$ som satisfierar $|x - x_0| < \delta$. Tips: Det kan vara nyttigt att separat undersöka fallen $b < 0$ och $b > 0$. (Du kan också alternativt använda den ”vänstra sidan av triangelolikheten”.)