Institutionen för matematik och statistik
Analys I
Uppgifter för vecka 38 (17.9-21.9.2012)

Obs: I några av uppgifterna är det nyttigt att komma ihåg att $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$, osv. (Dessa kan granskas genom att utföra multiplikationerna.)

Uppgifter för början av veckan (O1-O2; K1-K3)

O1. Vilka tal satisfierar olikheten $|x-3| < 2^{-100}$? Gissa först svaret genom att tolka absolutbeloppet av skillnaden som ett avstånd. Bevisa sedan påståendet genom att använda absolutbeloppets egenskaper ($|x| < a$ om och endast om $-a < x < a$; här är a positivt.) Ge svaret som ett intervall. Bearbeta olikheterna noggrant!

O2. Vilka tal satisfierar olikheten $|2x-7| < 1$? Ge svaret som ett intervall. Omformulera olikheten först till formen $|x-a| < b$.

K1. Hitta ett sådant tal $K > 0$ så att för alla tal x i intervallet $]0,2[$ gäller $|x^2 - 1| \leq K|x-1|$. Uppskatta!

K2. Hitta ett sådant tal $K > 0$ så att för alla tal x i intervallet $]0,2[$ gäller $|x^3 - 1| \leq K|x-1|$.

K3. (a) Vilket intervall bildas av alla reella tal x vars närmevärde med två decimalers noggrannhet är $23,14$? Tänk på skolans avrundningsregler.
(b) Anta att $|x - e^{\pi}| < 2^{-1}10^{-1}$. Vad vet vi om talets x decimalutveckling på basisen av detta antagande?
(c) Vad om $|x - e^{\pi}| < 2^{-1}10^{-23}$?
(Decimalutvecklingen för talet e^{π} börjar såhär:
23,140692632779269005729086367948547380266106242600211.)

Uppgifter för slutet av veckan (O3-O4; K4-K6)

O3. Hitta ett sådant tal $K > 0$ att för alla tal x i intervallet $[1,3]$ gäller $|2x^2 + x - 10| \leq K|x-2|$. Obs: Värdet för $2x^2 + x$ i punkten $x = 2$ är 10. Därför lönar det sig att börja som följande: $(2x^2 + x) - 10 = (2x^2 + x) - (8 + 2) = (2x^2 - 8) + (x - 2)$.

O4. Hitta ett sådant tal $K > 0$ att för alla tal x i intervallet $[0,2]$ gäller $|(x^3 - 2x^2 + 3x - 4) - (-2)| \leq K|x-1|$. Obs: Värdet för $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ i punkten $x = 1$ är -2. Formlerna i början av uppgifterna kan vara till nytta...

K4. Motivera användes absolutbeloppets definition att
(a) $|x| \geq 0$;
(b) $|x| = |-x|$;
(c) $|xy| = |x||y|$. (Både x och y kan vara oberoende av varandra < 0, $= 0$ eller > 0. Undersök alla 9 fall.)

K5. Hitta ett sådant tal $K > 0$ att för alla tal x i intervallet $[1, 3]$ gäller

$$\left| \frac{x+2}{2x+3} - \frac{4}{7} \right| \leq K|x-2|.$$

Det lönar sig att räkna ut skillnaden inom absolutbeloppet och uppskatta uttrycket uppåt till formen ”en konstant gånger $|x-2|$”.

K6. Hitta ett tal $h > 0$ så att

$$\left| \frac{x+2}{2x+3} - \frac{4}{7} \right| < 7777^{-7777}$$

gäller alltid då $|x-2| < h$. Det lönar sig att använda sig av lösningen till K5!