DIFFERENTIAL- OCH INTEGRALKALYL I.1

Ritva Hurri-Syrjänen/Hösten 1999/Föreläsningar
Svensk översättning: Stefan Michelsson

1. INLEDNING

Mängdlära

Förkortningar och beteckningar.
$A \Longrightarrow B$ Av A följer B. Implikation.
$A \Longleftrightarrow B$ A och B är ekvivalenta. Ekvivalens.
$\exists$ det existerar.
$\exists_1$ det existerar en och endast en.
$\nexists$ det existerar inte.
$\forall$ för alla.
MS motsägelse.
s.a. så att (sådan att).
omm om och endast om.
$a := b$ definiera a att vara b.
omg. omgivning.
Lemma Hjälpsats.
Korollarium Följdsats.
Antites Motantagande.

Mängder. Exempel på mängder:

(1) Mängden av heltal $\mathbb{Z}$
(2) Mängden av positiva heltal $\mathbb{N}$. Element: $1, 2, 3, \dots$
(3) Mängden av icke-negativa heltal $\mathbb{N}_0$. Element: $0, 1, 2, \dots$
(4) Mängden av reella tal $\mathbb{R}$
(5) Slutet intervall $[0, 100]$
(6) Öppet intervall $(0, 1000)$, ibland också $]0, 1000[$
(7) Mängden av kontinuerliga funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
(8) Första årets matematikstuderande
(9) Lärarna för första årets matematikstuderande

Definition. En mängd är en väldefinierad samling entiteter (objekt), som kallas element.

En mängd är given, då vi känner till dess element, med andra ord, för varje entitet vet vi om det tillhör mängden eller inte.

Mängderna A och B är lika, dvs. $A = B$, om de innehåller exakt samma element.

Den tomma mängden, $\emptyset$, är den mängd, som inte har ett enda element.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Beteckningar. $x \in A$, x är ett element i mängden A, alltså x tillhör mängden A.
$x \notin A$, x tillhör inte mängden A.
$A \subset B$, (betecknas även $A \subseteq B$) mängden A är en delmängd i mängden B, alltså A innehålls i mängden B, dvs. $\forall x \in A$ gäller att

$$x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

$A \supset B$ betyder att $B \subset A$.
$A \not\subseteq B$ betyder att $A \subseteq B$ inte gäller.

Exempel. $6 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Obs. $6 \in \mathbb{Z}$ och $\{6\} \subset \mathbb{Z}$.

Anmärkningar.

(1) $A \subset B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.
(2) $\emptyset \subset A$ för varje mängd A.
(3) $x \notin \emptyset$ för alla entiteter x.
(4) Terminologi: $A \neq \emptyset$, mängden A är icke-tom.
(5) $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}$ är mängden A:s potensmängd, med andra ord, den mängd som utgörs av alla delmängder till mängden A.

Följande påståenden är ekvivalenta.

(1) $A = B$.
(2) $A \subset B$ och $B \subset A$.
(3) $x \in A \Longleftrightarrow x \in B$.

Mera beteckningar. $\{x | \text{villkor för } x\}$ = mängden av de element x som uppfyller villkoret.

Exempel.

(1) $\{x \in \mathbb{Z} | |x| < 3\}$, element: $-2, -1, 0, 1, 2$.
(2) $\{x \in \mathbb{R} | x^2 = -1\} = \emptyset$.

Anmärkning. Beteckningen $\{a_1, \dots, a_n\}$ = mängden av elementen $a_1, \dots, a_n$

$$= \{x | x = a_k \text{ för något } k = 1, \dots, n\}.$$

Exempel.

(1) $\{1, 1, 1, 2\} = \{1, 2\}$ (två element)
(2) $\{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{2n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$
(3) $\{a_1, a_2, \dots\} = \{a_j | j \in \mathbb{N}\}$
(4) $\{a\}$ = en mängd som har exakt ett element a är en sk. enpunktsmängd

Anmärkning. $a \neq \{a\}$;
$x \in \{a\} \Longleftrightarrow x = a$.

Mängdoperationer. Låt A och B vara icke-tomma mängder.
Union

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ eller } x \in B\}.$$

Snitt

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ och } x \in B\}.$$

Skillnad

$$A \backslash B = \{x | x \in A \text{ och } x \notin B\}.$$

Exempel. $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}=\{0,-1,-2,\dots\}$.

Terminologi. Mängderna A och B är disjunkta, om $A\cap B=\emptyset$.

Räkneformler. Låt A, B och C vara mängder.

Kommutativa lagarna:

(1) $A\cup B=B\cup A$
(2) $A\cap B=B\cap A$

Associativa lagarna:

(1) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$
(2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$

Distributiva lagarna:

(1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

De Morgans lagar:

(1) $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$
(2) $A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$

Bevis för De Morgans lag (1).

$$\begin{aligned} x\in A\backslash(B\cup C) &\iff x\in A \text{ och } (x\notin B\cup C)\\ &\iff x\in A \text{ och } (x\notin B \text{ och } x\notin C)\\ &\iff (x\in A \text{ och } x\notin B) \text{ och } (x\in A \text{ och } x\notin C)\\ &\iff x\in A\backslash B \text{ och } x\in A\backslash C\\ &\iff x\in (A\backslash B)\cap(A\backslash C). \end{aligned}$$

Generaliserade union och snitt. Operationerna $\cup$ och $\cap$ kan generaliseras på följande sätt: Låt I vara en indexmängd och mängderna A_i delmängder till mängden E för alla $i\in I$.

Snittet och unionen av mängderna A_i definieras enligt följande:

$$\bigcup_{i\in I} A_i=\{x\in E|x\in A_i \text{ för något } i\in I\}$$

och

$$\bigcap_{i\in I} A_i=\{x\in E|x\in A_i \text{ för alla } i\in I\}.$$

Om speciellt $I=\{1,2,\dots,n\}$, så betecknar vi

$$\bigcup_{i\in I} A_i=\bigcup_{i=1}^{n} A_i\,.$$

Om $I=\mathbb{N}$, så betecknar vi

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\\ &=\{x|x\in A_i \text{ för något } i\in\mathbb{N}\}\,.\end{aligned}$$

Till exempel, då $I=\{3,4,5,6\}$, får vi

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=3}^{6} A_i &= A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6\\ &=\{x|x\in A_j \text{ för något } j=3,4,5,6\}\,.\end{aligned}$$

Exempel. Antag att $A_n=[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$ för alla $n\in\mathbb{N}$. Då är

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=\{0\}$$

och

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n=[-1,1].$$

Om de reella talen

Det finns flera sätt att definiera mängden av reella tal $\mathbb{R}$.

Vi antar att det existerar en icke-tom mängd $\mathbb{R}$ element, som vi kallar reella tal, och som uppfyller följande axiom, då det givits två operationer (addition och multiplikation) och då det existerar en ordningsrelation.

De reella talens axiom. I $\mathbb{R}$ kan vi använda oss av tre saker:

1. Addition.

För varje par $x,y\in\mathbb{R}$ finns det ett entydigt bestämt tredje tal, som vi betecknar $x+y$.

2. Multiplikation.

För varje par $x,y\in\mathbb{R}$ finns det ett entydigt bestämt tredje tal, som vi betecknar xy eller $x\cdot y$.

3. Ordningsrelation.

För varje par $x,y\in\mathbb{R}$ vet vi ifall $x<y$ gäller eller inte. (Om $x<y$, så betecknar vi $y>x$.)

Dessa tre givna saker uppfyller följande axiom:

A. Kroppsaxiomen.

(1) $x+y=y+x$. (Kommutativa lagen)
(2) $x+(y+z)=(x+y)+z$. (Associativa lagen)
(3) $\exists 0\in\mathbb{R}$, för vilken $x+0=x\quad\forall x\in\mathbb{R}$. (Nollelement)
(4) $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}$, för vilket $x+y=0$. Vi betecknar $y=-x$ och $x-y=x+(-y)$. (Motsatt element)
(5) $xy=yx$.
(6) $x(yz)=(xy)z$.
(7) $x(y+z)=xy+xz$. (Distributiva lagen)
(8) $\exists 1\in\mathbb{R}$, för vilken $1\neq 0$ och $1\cdot x=x$ för alla $x\in\mathbb{R}$. (Enhetselement)
(9) Om $x\in\mathbb{R}$ och $x\neq 0$, så $\exists y\in\mathbb{R}$, för vilket $xy=1$. Vi betecknar $y=x^{-1}$ eller $y=\frac{1}{x}$ eller $1/x$. Vi betecknar $\frac{x}{y}=x/y=x\cdot y^{-1}$. (Inverterat element)

B. Ordningsaxiomen.

(1) Om $x \in \mathbb{R}$ och $y \in \mathbb{R}$, så gäller exakt ett av villkoren $x < y$, $x = y$, $x > y$.
(2) $x < y < z \Longrightarrow x < z$.
(3) $x < y \Longrightarrow x + z < y + z$.
(4) $x > 0$ och $y > 0 \Longrightarrow xy > 0$.

Vi betecknar:

(1) $x \leq y$, om $x < y$ eller $x = y$.
(2) $x \geq y$, om $x > y$ eller $x = y$.

C. Fullständighetsaxiomet. En icke-tom uppifrån begränsad delmängd i $\mathbb{R}$ har ett supremum. (Begreppet ”supremum” definieras senare!)

Från dessa axiom kan man härleda flera egenskaper för de reella talen (se Myrbergs bok. Exempelvis, om $x < y$ och $z > 0$, så är $xz < yz$). Dessa antar vi i fortsättningen vara kända.

Den reella axeln

Varje punkt på den reella axeln motsvarar ett och endast ett reellt tal, och omvänt så motsvarar varje reellt tal en och endast en punkt på den reella axeln.

De positiva heltalen, dvs. de naturliga talen är $1, 2, 3, 4, \ldots$ Denna talmängd betecknar vi med symbolen $\mathbb{N}$.

Induktiv mängd. Mängden $A \subset \mathbb{R}$ är induktiv, om

(1) $1 \in A$.
(2) För varje $x \in A$ gäller, att $x + 1 \in A$.

De naturliga talen. Ett reellt tal är ett naturligt tal, om det tillhör varje induktiv mängd. Symbolen för mängden av de naturliga talen är $\mathbb{N}$.

Anmärkning: $\mathbb{N}$ är själv en induktiv mängd, ty $1 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{N}$, ... Eftersom $\mathbb{N}$ är en delmängd i varje induktiva mängd, så kan vi säga att $\mathbb{N}$ är den minsta induktiva mängden.

Induktionsprincipen. Låt $A \subset \mathbb{N}$. Vi antar att

(1) $1 \in A$.
(2) $n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A$.

Då är $A = \mathbb{N}$. (Motivering ovan.)

Exempel. *Visa att*

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

för alla $n \in \mathbb{N}$.

Bevis. Vi bevisar påståendet med induktion.

(1) $n = 1$: $1 = \frac{1}{4}(1+1)^2$. Alltså gäller påståendet då $n = 1$.
(2) Induktionsantagande: Påståendet är sant, då $n = k$.

(3) Induktionspåstående: Påståendet är sant, då $n = k + 1$. Beviset för induktionspåståendet är följande: $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
&1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 \\
&= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3 \quad \text{(Med stöd av induktionsantagandet)} \\
&= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^2(k+1) \\
&= (k+1)^2(\frac{1}{4}k^2 + k + 1) \\
&= (k+1)^2\frac{1}{4}(k^2 + 4k + 4) \\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2.
\end{aligned}$$

Alltså

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

för alla $n \in \mathbb{N}$. Påståendet är därmed bevisat.

De icke-negativa heltalen är $0, 1, 2, \ldots$ Symbolen för denna talmängd är $\mathbb{N}_0$. Den består alltså av de naturliga talen och talet 0.

Heltalen är $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ Symbolen för talmängden är $\mathbb{Z}$. Denna mängd består alltså av de naturliga talen, deras motsatta element och talet 0.

De rationella talen det vill säga bråktalen är

$$\frac{a}{b}\text{, där } a \in \mathbb{N}_0,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\,.$$

Symbolen för talmängden är $\mathbb{Q}$.

Anmärkning:

(1) $x, y \in \mathbb{Q} \Longrightarrow xy \in \mathbb{Q}, x + y \in \mathbb{Q}$
(2) $x, y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0 \Longrightarrow x/y \in \mathbb{Q}$
(3) exempelvis $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, med andra ord så finns det inget $x \in \mathbb{Q}$ så att $x^2 = 2$.

De irrationella talen är $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Absolutbelopp

Definition. Absolutbeloppet för det reella talet x är

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0. \\ -x, & \text{om } x \leq 0. \end{cases}$$

Anmärkning. $|0| = 0$ *och* $|x| \geq 0$ *gäller alltid.*

Formler.

$$\begin{aligned} &|-x| = |x| \\ &|xy| = |x||y| \\ &|x|^2 = x^2 \\ &|x| = \sqrt{x^2} \\ &-|x| \le x \le |x| \end{aligned}$$

Triangelolikheterna. Låt $x, y \in \mathbb{R}$. Då är

$$\Big||x| - |y|\Big| \le |x+y| \le |x| + |y| \,.$$

Bevis. (A) Bevis för högra sidan: Eftersom

$$\begin{cases} -|x| \le x \le |x| \\ -|y| \le y \le |y| \,, \end{cases}$$

så är

$$-|x| - |y| \le x + y \le |x| + |y| \,.$$

Alltså är

$$\begin{cases} x + y \le |x| + |y| \\ -(x+y) \le |x| + |y| \,, \end{cases}$$

och vidare är

$$|x+y| \le |x| + |y| \,.$$

Därmed är högra sidan bevisad.

(B) Bevis för vänstra sidan: Med stöd av (A)-delen är

$$|x| = |(x+y) + (-y)| \le |x+y| + |-y| = |x+y| + |y| \,.$$

Alltså är

$$|x+y| \ge |x| - |y| \,.$$

På motsvarande sätt är

$$|x+y| \ge |y| - |x| \,.$$

Påståendet är bevisat.

Bernoullis olikhet. Då $x \ne 0$, $x \in \mathbb{R}$ och $x \ge -1$ så är $(1+x)^n \ge 1 + nx$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Bevisas med induktion, se Räkneövningsuppgift 1.4.

Anmärkningar. *(1) Låt $x, y \in \mathbb{R}$. Då är*

$$\Big||x| - |y|\Big| \le |x-y| \le |x| + |y| \,.$$

(2) Låt $x_i \in \mathbb{R}$, där $i \in \mathbb{N}$. Då är

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

för alla $n \in \mathbb{N}$.

Bevisas med induktion, se Handledning 2.5.

(3)

$$|x| < |y| \iff x^2 < y^2$$

Exempel. *(1) Låt $x \ne 1$. Då är*

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| < 1 \iff \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} < 1 \iff x < \frac{1}{2} \,.$$

(2)

$$|2x-1| \le |x| + 1$$

Vi upptäcker att

$$2x - 1 \le 0 \iff x \le \frac{1}{2}.$$

Vi delar in lösningen i tre delar: Vi får

(1) $x \le 0$*:* $|2x-1| \le |x| + 1 \iff -(2x-1) \le -x + 1 \iff 0 \le x$. *Alltså är* $x = 0$.
(2) $0 < x \le \frac{1}{2}$*:* $|2x-1| \le |x| + 1 \iff -(2x-1) \le x + 1 \iff 3x \ge 0$. *Alltså är* $0 < x \le \frac{1}{2}$.
(3) $x > \frac{1}{2}$*:* $|2x-1| \le |x| + 1 \iff 2x - 1 \le x + 1 \iff x \le 2$. *Alltså är* $\frac{1}{2} < x \le 2$.

Således gäller $|2x-1| \le |x| + 1$ *omm* $0 \le x \le 2$.

Begränsade mängder och obegränsade mängder

Intervall. Låt $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(1) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$ slutet intervall.
(2) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}$ halvöppet intervall.
(3) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \le b\}$ halvöppet intervall.
(4) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ öppet intervall.

Obegränsade intervall.

(1) $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \le a\}$.
(2) $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$.
(3) $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \ge a\}$.
(4) $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$.

Anmärkning. $\infty \notin \mathbb{R}$, $-\infty \notin \mathbb{R}$. *Dessa symboler existerar endast i beteckningarna ovan.*

Definition. En godtycklig, icke-tom mängd $E \subset \mathbb{R}$ är uppifrån begränsad, om det finns ett sådant $a \in \mathbb{R}$ att $a \ge x$ för alla $x \in E$. Då är a en övre gräns för mängden E.

Exempel. *(1) Intervallet $[0, 17]$ är uppifrån begränsat. Övre gränser för intervallet är till exempel 17 och 100. Det är värt att notera, att även varje öppet intervall (a, b) är uppifrån (och nerifrån) begränsat för alla $a, b \in \mathbb{R}$.*

(2) $\mathbb{N}$ är inte uppifrån begränsad.

Anmärkningar. *(1) Om en godtycklig, icke-tom mängd E är uppifrån begränsad, så har den alltid oändligt många övre gränser. Alltså, om talet a är en övre gräns för mängden E och det för talet b gäller att $b \ge a$, så är även b en övre gräns för mängden E.*

På motsvarande sätt definierar vi begreppen nerifrån begränsad och undre gräns.

Definition. Mängden E är begränsad, om den är både uppifrån och nerifrån begränsad. Om mängden E inte är begränsad, så är mängden E obegränsad.

Sats 1.1. *Följande villkor är ekvivalenta:*

(1) *Mängden E är begränsad.*
(2) *Det finns två tal a och b så att $a \leq x \leq b$ för alla $x \in E$.*
(3) *Det finns ett tal $M > 0$ så att $|x| \leq M$ för alla $x \in E$.*

Exempel.

(1) *Ett intervall (a, b), där $a, b \in \mathbb{R}$, är alltid begränsat.*
(2) *$\emptyset$ är begränsad.*
(3) *$\mathbb{Z}$ är varken uppifrån eller nerifrån begränsad.*

Definition. Talet a är det minsta talet i mängden $E \subset \mathbb{R}$ om

(1) $a \in E$,
(2) $a \leq x \ \forall x \in E$.

Då betecknar vi $a = \min E$.

Anmärkning. *Det minsta talet i mängden E är alltid en undre gräns för mängden E.*

Anmärkning. *På motsvarande sätt definierar vi det största talet i en godtycklig, icke-tom mängd E. Detta tal betecknar vi $\max E$.*

Sats 1.2. *Mängden $E \subset \mathbb{R}$ kan ha högst ett minsta element och högst ett största element.*

Bevis. Låt både a_1 och a_2 vara minsta element i mängden E. Eftersom a_1 är minst, så är $a_1 \leq a_2$. Eftersom a_2 är minst, så är $a_2 \leq a_1$. Alltså måste det nödvändigtvis gälla att $a_1 = a_2$.

Exempel. *Låt $E = [0, 1)$. Då är 0 det minsta elementet i mängden E och mängden har inget största värde.*

Bevis. Vi gör en antites: Det existerar ett $\max E = b$. Eftersom $b \in E$, så är $0 \leq b < 1$. Men då är $\frac{b+1}{2} \in (b, 1)$. Alltså har vi att $\frac{1}{2}(b+1) \in E$ och $b < \frac{1}{2}(b+1)$, och därmed är $b \neq \max E$, MS. Alltså är antitesen falsk och det ursprungliga påståendet är sant.

Ändliga mängder. Mängden $A \subset \mathbb{R}$ är ändlig, om den har ett ändligt antal element. Antalet element betecknas $\#A$.

Alltså är A ändlig ifall $\#A \in \mathbb{N}$.
Till exempel:
$\#A = 0 \iff A = \emptyset$.
$\#A = 1 \iff A$ är en enpunktsmängd .
$\#\{1, 6, 15\} = 3$.

Sats 1.3. *Om $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ och A är ändlig, så har mängden ett största och ett minsta element.*

Bevis. Vi betecknar $n = \#A$.

Induktion:
(a) $n = 1:\ A = \{a\}$ enpunktsmängd; $a = \max A = \min A$.
(b) Induktionsantagande: satsen är sann, då $n = p$.

Induktionspåstående: satsen gäller, då $n = p + 1$.

Vi bevisar induktionspåståendet: Låt $\#A = p+1$. Vi väljer något element $a \in A$ och betecknar $A_1 = A \setminus \{a\}$. Nu är $\#A_1 = p$ och med stöd av induktionsantagandet finns det ett element $\max A_1$, som vi kan beteckna a_1.

Om $a_1 < a$, så är $a = \max A$.
Om $a_1 > a$, så är $a_1 = \max A$.
På motsvarande sätt bevisas att det existerar ett minimum.

Omgivningar

Låt $a \in \mathbb{R}$ och $r > 0$. Vi betecknar

$$U(a, r) = (a - r, a + r) = \{x \,|\, |x - a| < r\},$$

som är en <u>r-omgivning</u> till punkten a. Kort så säger vi att $U(a, r)$ är punkten a:s r-omg.

Vidare är

$$U^{'}(a, r) = U(a, r) \setminus \{a\}$$

punkten a:s punkterade omgivning.

2. SUPREMUM OCH INFIMUM

Definition. Antag att $E \subset \mathbb{R}$. Talet $G \in \mathbb{R}$ är supremum för mängden E, det vill säga den minsta övre gränsen, om den är minst av alla övre gränser för E. Vi betecknar då $G = \sup E$.

Anmärkning. $G = \sup E \iff$

(1) *$G \geq x$ för alla $x \in E$ dvs. G är en övre gräns för mängden E.*
(2) *$G \leq M$ för alla tal M som är övre gränser för mängden E.*

Anmärkning.

(1) *En mängd kan ha högst ett supremum.*
(2) *Om $\sup E$ existerar, så är E uppifrån begränsad. Observera, att exempelvis $\sup \mathbb{N}$ inte existerar.*

Definition. *Talet $g \in \mathbb{R}$ är infimum för mängden E, det vill säga den största undre gränsen, om den är störst av alla undre gränser för E. Vi betecknar då $g = \inf E$.*

Anmärkning. $g = \inf E \iff$

(1) *$g \leq x$ för alla $x \in E$ dvs. g är en undre gräns för mängden E.*
(2) *$g \geq m$ för varje undre gräns m för mängden E.*

Exempel. *Låt $E = (0, 1]$. Då är $\sup E = 1$ och $\inf E = 0$.*

Bevis. $\sup E = 1$: Talet $y \in E$ är en övre gräns för intervallet E om och endast om $y \geq 1$. Alltså är $\sup E = 1$.

$\inf E = 0$:

(1) $0 \leq x \ \forall x \in (0, 1]$.
(2) Antag att m är en undre gräns för intervallet $(0, 1]$. Vi visar att $m \leq 0$. Vi gör en antites: $m > 0$. Vi kan anta att $m \leq \frac{1}{2}$. Då är $0 < \frac{m}{2} \leq \frac{1}{4}$ och $\frac{m}{2} \in (0, 1]$. Men $\frac{m}{2} < m$ och därmed är m inte en undre gräns för intervallet $(0, 1]$, MS.

Sats 2.1. [Myrberg, Sats 1.4.1] *Om $E \subset \mathbb{R}$ och $\max E$ existerar, så är $\max E = \sup E$. Om $\min E$ existerar, så är $\min E = \inf E$.*

Bevis. Antag att $\max E = M$ existerar.

(1) M är en övre gräns för mängden E, alltså är $x \leq M \quad \forall x \in E$.
(2) Eftersom $M \in E$, så är $M \leq \sup E$. Å andra sidan är M en övre gräns för mängden E enligt (1). Alltså är $M \geq \sup E$.

Således är $M = \sup E$.

Sats 2.2. [Myrberg, Sats 1.4.2] *Om den icke-tomma mängden $E \subset \mathbb{R}$ har ett supremum, så är detta supremum entydigt bestämt.*

Bevis. Låt $\sup E = G$ och $\sup E = G_1$. G_1 är alltså en övre gräns för mängden E och enligt supremums definition är då $G \leq G_1$. På samma sätt får vi $G_1 \leq G$. Alltså är $G = G_1$.

FÖLJANDE TVÅ SATSER ÄR SPECIELLT VIKTIGA!

Sats 2.3. [Myrberg, Sats 1.4.3] *Antag att $G = \sup E$ och att $\epsilon > 0$. Då finns det ett $x \in E$ för vilket $x > G - \epsilon$.*

Bevis. Vi gör en antites: Ett sådant element x existerar inte. För alla $x \in E$ gäller det att $x \leq G - \epsilon$. Då är $G - \epsilon$ en övre gräns för mängden E, och därmed är G inte den minsta övre gränsen, ty $G - \epsilon < G$. Vi har fått en motsägelse. Antitesen är alltså fel och påståendet är riktigt.

Sats 2.4. [Myrberg, Uppgift 1.4.3] *Låt $E \subset \mathbb{R}$ och $G \in \mathbb{R}$ vara sådana att*

(1) *G är en övre gräns för mängden E,*
(2) *$\forall \epsilon > 0 \ \exists x \in E$, för vilket $x > G - \epsilon$.*

Då är $G = \sup E$.

Bevis. Antag att a är en övre gräns för mängden E. Eftersom G är en övre gräns, så räcker det att visa att $a \geq G$. Vi gör ett motantagande: $a < G$. Vi betecknar $\epsilon := G - a > 0$. Då är $a = G - \epsilon$ och enligt antagandet (2) existerar det ett $x \in E$, för vilket $x > G - \epsilon = a$. Alltså är a ingen övre gräns, MS. Alltså $G = \sup E$.

Sats 2.5. Motsvarande för infimum. $g = \inf E \iff$

(1) För alla $x \in E$ gäller $x \geq g$, dvs. g är en undre gräns för mängden E.
(2) För varje $\epsilon > 0$ finns det ett $x \in E$ så att $x < g + \epsilon$.

Exempel. *Bestäm supremum och infimum för mängden*

$$A = \left\{ \frac{2-n}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$$

Motivera noggrannt. Har mängden ett minsta och/eller största värde?

Lösning: Påståendet är att $\max A$ existerar och att $\sup A = \max A = 1$. Vi bevisar detta.

(1) Eftersom
$$\frac{2-n}{n} = -1 + \frac{2}{n} \leq -1 + \frac{2}{1} = 1 \,, \forall n \in \mathbb{N} \,,$$
så är 1 en övre gräns och därmed är $\sup A \leq 1$.
(2) Å andra sidan är $1 \in \mathbb{N}$, så $1 \in A$ och således är $\max A = 1$.

Alltså $\sup A = \max A = 1$.

Påståendet är att $\inf A = -1$. Vi bevisar detta.

(1) Eftersom $-1 + \frac{2}{n} > -1$ för alla $n \geq 1$, så är $\inf A \geq -1$.
(2) Beviset för andra riktningen: Låt $\epsilon > 0$. Vi har bevisat påståendet om vi hittar ett sådant $n_0 \in \mathbb{N}$, att
$$\frac{2-n_0}{n_0} < -1 + \epsilon \,.$$
Det sökta talet hittas nog:
$$\frac{2-n_0}{n_0} < -1 + \epsilon \iff \frac{2}{n_o} - 1 < -1 + \epsilon \iff n_0 > \frac{2}{\epsilon} \,.$$
Vi har alltså hittat talet n_0, om vi väljer $n_0 > \frac{2}{\epsilon}$.

Alltså $\inf A = -1$.

Mängden A har inget minsta värde, eftersom ekvationen $\frac{2-n}{n} = -1$ ($= \inf A$) saknar lösning, då $n \in \mathbb{N}$.

Fullständighetsaxiomet 2.6. *Om $E \subset \mathbb{R}$ är icke-tom och uppifrån begränsad, så existerar* $\sup E$.

Iakttagelse 2.7. *Det existerar ett $x \in \mathbb{R}$, för vilket $x^2 = 2$.*

Bevis. Se [Myrberg, Exempel 1.4.3].

Potenser. Låt $x \in \mathbb{R}$.

Vi antar att följande regler är kända:

$$x^{m+n} = x^m x^n$$

och

$$(x^m)^n = x^{mn},$$

där $m, n \in \mathbb{Z}$.

Lemma 2.8. *Låt $\emptyset \neq E \subset \mathbb{Z}$. Om mängden E är uppifrån begränsad, så existerar* $\max E$. *Om E är nerifrån begränsad, så existerar* $\min E$.

Bevis. Se Räkneövningsuppgift 2.5.

Antag att E är uppifrån begränsad. Då existerar $G := \sup E$. Sats 2.3 [Myrberg 1.4.3] ger att det finns ett $x \in E$, för vilket $x > G - \frac{1}{2}$. Då är $x = \max E$, eftersom det annars skulle finnas ett $y \in E$ så att $y > x$ och $y \geq x + 1 > G$. Därför är G inte en övre gräns för mängden E, MS.

På motsvarande sätt bevisar vi Lemmats senare påstående.

Arkhimedes Sats. *(287–212 fKr.) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{Z}$, för vilket $n > x$. (Detta betyder att mängden $\mathbb{Z}$ inte är uppifrån begränsad.)*

Bevis.

(1) Om $x < 0$ så kan vi välja $n = 0$.
(2) Vi kan alltså anta att $x \geq 0$.

Vi betecknar $E = \{m \in \mathbb{Z} |\ m \leq x\}$. Eftersom $0 \in E$, så är $E \neq \emptyset$. Eftersom x är en övre gräns för mängden E, så är E uppifrån begränsad. Enligt fullständighetsaxiomet har mängden E en minsta övre gräns som vi betecknar $G = \sup E$. Med stöd av föregående hjälpsats är $G = \max E$. Därmed är $G \in \mathbb{Z}$. Vi betecknar $n = G + 1$, varvid $n \in \mathbb{Z}$ och $n \notin E$. Alltså är $n > x$.

Följdsats 2.9. *Låt $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Då finns det ett $n \in \mathbb{N}$, för vilket $\frac{1}{n} < x$.*

Bevis. Av Arkhimedes sats följer att det existerar ett $n \in \mathbb{N}$ så att $n > \frac{1}{x}$. Alltså är $\frac{1}{n} < x$.

Sats 2.10. [Myrberg, Sats 1.7.2] *Mellan två olika reella tal finns det alltid ett rationellt och ett irrationellt tal - och därmed till och med oändligt många.*

Bevis. Låt $a, b \in \mathbb{R}$ vara sådana att $a < b$. Vi skall visa att det existerar ett $r \in \mathbb{Q}$, för vilket $a < r < b$. Vi betecknar $x := b - a > 0$. Följdsatsen till Arkhimedes sats, Följdsats 2.9, ger att det existerar ett $n \in \mathbb{N}$, för vilket $\frac{1}{n} < x$.

Vi betecknar $E := \{m \in \mathbb{Z} |\ m \geq nb\}$. Arkhimedes sats ger att $E \neq \emptyset$. Mängden E är nerifrån begränsad, eftersom talet nb är dess undre gräns. Enligt Lemma 2.8 existerar $\min E = p$.

Eftersom $p - 1 \notin E$, så är $p - 1 < nb$, vilket ger $\frac{p-1}{n} < b \leq \frac{p}{n}$. Det senare estimatet följer av att $p \in E$.

Nu är $r = \frac{p-1}{n}$ det sökta talet, ty

$$r = \frac{p}{n} - \frac{1}{n} > \frac{p}{n} - x \geq b - x = a\,.$$

Påståendet att det finns oändligt många rationella tal bevisas i Räkneövningsuppgift 2.6.

Påståendena angående irrationella tal är övningsuppgifter.

Följande korollarium är viktigt!

Korollarium 2.11. *Varje reellt tal kan approximeras godtyckligt noggrannt med hjälp av rationella tal. Alltså för varje $a \in \mathbb{R}$ och $\epsilon > 0$ finns det tal $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ så att*

$$a - \epsilon < r_1 < a < r_2 < a + \epsilon\,.$$

3. AVBILDNINGAR

Låt A och B vara icke-tomma mängder. Om det för varje element (punkt) $x \in A$ finns ett och endast ett motsvarande element y i B, så säger vi att vi har definierat en avbildning från mängden A till mängden B och betecknar detta $f : A \to B$.

Avbildningen $f : A \to B$ är alltså en regel eller motsvarighet, som förbinder varje element x i mängden A med ett väl definierat element y i mängden B.

Elementet y säges vara <u>bilden</u> av x och betecknas med symbolen $f(x)$.

Mängden A är avbilbningens <u>startmängd</u>, (<u>definitionsmängd</u>). Mängden B är avbildningens <u>målmängd</u>.

Mängden

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in B : \exists x \in A \text{ så att } f(x) = y\}$$

är <u>bilden</u> av mängden A eller funktionen f:s <u>värdemängd</u>.

Om $B_1 \subset B$, så är

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A : f(x) \in B_1\}$$

<u>urbilden</u> för mängden B_1.

Om $A_1 \subset A$, så är avbildningen $g : A_1 \to B$, $g(x) = f(x)$, <u>restriktionen</u> för avbildningen f till A_1 och den betecknas $g = f\Big|_{A_1}$.

Mängden

$$\{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\}$$

är grafen för funktionen f.

Anmärkning. *Beteckningen f är en avbildning och beteckningen $f(x)$ är ett element i mängden B! Dessa är olika saker.*

Anmärkning. *Avbildningen f kan även betecknas $x \mapsto f(x)$. Alltså till exempel $x \mapsto x^2$.*

Exempel.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$$

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad g(n) = \frac{1}{n}$$

Avbildningen g är en sk. talföljd, som vi behandlar mera senare.

Olika sorters avbildningar. Avbildningen $f : A \to B$ är en (1) <u>surjektion</u>, om $f(A) = B$, dvs. om varje element i mängden B är en bild till något element i mängden A.

Med andra ord, f är en surjektion, om det för alla $y \in B$ finns ett $x \in A$, för vilket $f(x) = y$. ”Bilderna fyller målmängden”.

Avbildningen $f : A \to B$ är en (2) <u>injektion</u>, om

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ endast då } x_1 = x_2\,.$$

Med andra ord,

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2\,.$$

En injektion avbildar alltså olika element på olika bilder.

Avbildningen $f : A \to B$ är en (3) <u>bijektion</u>, om den är både en surjektion och en injektion.

Beteckning. *Vi betecknar ofta*

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}\,.$$

Exempel.

(1) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$, är en surjektion, ty

$$f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_+) = \{x | x \geq 0\}\,,$$

men f är inte en injektion, eftersom till exempel $f(1) = f(-1) = 1$.

(2) Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$, är en bijektion. Surjektiviteten av g visas av att varje $y \in \mathbb{R}$ är bilden av elementet $y/2 \in \mathbb{R}$, och g är även en injektion: om $g(x_1) = g(x_2)$, så är $2x_1 = 2x_2$ och därmed är $x_1 = x_2$.

(3) För funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, är

$$\begin{aligned}
&A = [-1, 2], \quad f(A) = [0, 4] \\
&B = [-1, 2], \quad f^{-1}(B) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] : \\
&x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B \Longleftrightarrow x^2 \in [-1, 2] \\
&x^2 \leq 2 \Longleftrightarrow |x| \leq \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Anmärkningar. *(1) Låt $f : A \to B$ vara en avbildning. Då är avbildningen $g : A \to f(A)$, $g(x) = f(x)$ för alla $x \in A$, en surjektion.*

Genom att lämna bort de onödiga punkterna från målmängden, alltså de punkterna, som inte är någon punkts bild, kan varje funktion göras till en surjektion.

(2) Två avbildningar $f_1 : A_1 \to B_1$ och $f_2 : A_2 \to B_2$ är lika, ifall $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ och $f_1(x) = f_2(x)$ för alla $x \in A_1$. Enbart ”samma regel” garanterar alltså inte likhet; även start- och målmängderna måste vara lika!

Exempel. *Antag att*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ s.a. } f(x) = x^2$$

$$g : [1, 6] \to \mathbb{R} \text{ s.a. } g(x) = x^2\,.$$

Då är $g \neq f$, eftersom startmängderna är olika mängder.

Sammansatt avbildning. Antag att $f : A \to B$ och $g : B \to C$ är avbildningar. Den sammansatta avbildningen $g \circ f : A \to C$ är en avbildning, för vilken

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ för alla } x\,.$$

Exempel.

$$\begin{aligned}
&f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ s.a. } f(x) = \cos x \\
&g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ s.a. } g(x) = x^2 \\
&(g \circ f)(x) = (\cos x)^2
\end{aligned}$$

Definition. En reell funktion är en funktion $f : A \to \mathbb{R}$, där $A \subset \mathbb{R}$.

Anmärkning. *På denna kurs är A vanligtvis ett intervall eller mera allmänt av formen $A = \Delta \setminus F$, där F är ändlig. Till exempel $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$.*

Anmärkning. *Många funktioner har en naturlig startmängd, där funktionen är definierad. Dvs., om f är definierad med ett analytiskt uttryck (Exempelvis $f(x) = 1/x$), så anser vi att startmängden för funktionen f är den största realtalsmängden, där funktionen ifråga är meningsfull. Till exempel funktionen $1/x$ är definierad i mängden $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Exempel. *Låt*

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}\,.$$

Den naturliga startmängden för funktionen f är $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$, $f : A \to \mathbb{R}$.

Den inversa avbildningen. Antag att $f : A \to B$ är en bijektion. För varje $y \in B$ finns det då ett entydigt $x \in A$ så att $f(x) = y$. Vi betecknar detta $x = f^{-1}(y)$, varvid vi får den inversa avbildningen för funktionen f,

$$f^{-1} : B \to A\,.$$

Då har vi att

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)\,.$$

Om f inte är en bijektion, så är den inversa avbildningen f^{-1} inte definierad.

Observera dock att urbilden, $f^{-1}(B_1)$, för mängden $B_1 \subset B$ alltid är definierad.

Den identiska funktionen. *Vi betecknar den identiska funktionen med $id_A : A \to A$, där $id_A(x) = x$ för alla $x \in A$. Kort kan vi beteckna $id = id_A$, ifall det inte finns fara för missförstånd.*

Avbildningen id_A är en bijektion och $id_A^{-1} = id_A$.

Sats 3.1. *Låt $f : A \to B$ vara en bijektion. Då är*

(1) *$f^{-1} : B \to A$ en bijektion.*
(2) *$(f^{-1})^{-1} = f$*
(3) *$f^{-1} \circ f = id_A$ och $f \circ f^{-1} = id_B$.*

Bevis. Detta är en enkel övningsuppgift.

Sats 3.2. *Om $f : A \to B$ och $g : B \to C$ är bijektioner, så är den sammansatta avbildningen $g \circ f : A \to C$ en bijektion och*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}\,.$$

Bevis. Detta är en enkel övningsuppgift.

Sats 3.3. *Antag att $f : A \to B$ och $g : B \to A$ är avbildningar, för vilka $g \circ f = id_A$ och $f \circ g = id_B$. Då är f en bijektion och $g = f^{-1}$.*

Bevis. f är en injektion, ty

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = y\,.$$

f är en surjektion, ty

$$b \in B \Longrightarrow b = f(g(b))\,.$$

$$y = f(x) \Longrightarrow g(y) = g(f(x)) = x \Longrightarrow g = f^{-1}\,.$$

Nu, eftersom f är en injektion och en surjektion, så är den också en bijektion.

Exempel. *Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Visa att f är en bijektion och bestäm f^{-1}.*

Lösning: Vi betraktar ekvationen $y = 2x + 3$, där x är okänd och y är given. Den har alltid exakt en lösning $x = \frac{y-3}{2}$. Nu är f alltså en bijektion och $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$, $y \in \mathbb{R}$.

4. GRÄNSVÄRDET FÖR EN TALFÖLJD

Anmärkning. En av analysens mest centrala begrepp är gränsvärdet för en talföljd!

Exempel på talföljder:

$$\begin{aligned}&1, 2, 3, 4, ...\\&0, 1, 0, 1, ...\\&1, 1/2, 1/3, 1/4, ...\\&5, 5, 5, 5, ...\end{aligned}$$

Talföljd. Om vi låter varje naturligt tal n motsvara ett reellt tal x_n, så får vi en (oändlig) talföljd

$$(x_n) = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

En talföljd är en avbildning $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, som betecknas

$$n \to x_n \quad \text{eller} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{eller} \quad (x_n).$$

Anmärkning. *En talföljd* (x_n) *får inte betecknas* $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ *eller* $\{x_n\}$.
Till exempel är följderna

$$\begin{aligned}(x_n) &= 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\\(y_n) &= 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots \quad \textit{(resten av termerna ettor)}\end{aligned}$$

olika följder, fastän

$$\{x_n | n \in \mathbb{N}\} = \{y_n | n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}.$$

Gränsvärdet för en talföljd. En talföljd (x_n) har ett gränsvärde $a \in \mathbb{R}$, om det för varje tal $\epsilon > 0$ finns ett tal $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ så att

$$|x_n - a| < \epsilon \text{ , då } n > n_\epsilon .$$

Med andra ord, för varje omgivning $U(a, \epsilon)$ till punkten a finns det ett tal n_ϵ så att

$$x_n \in U(a, \epsilon) \text{ alltid då } n > n_\epsilon .$$

Talet n_ϵ är vanligtvis beroende av epsilon.

Om följden (x_n) har ett gränsvärde, så säger vi att följden är konvergent. Om följdens gränsvärde är a, så säger vi att följden (x_n) konvergerar mot talet a och betecknar

$$x_n \to a \text{ eller } a = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

Följden divergerar, om den inte konvergerar mot något tal.

Exempel.

(1) Gränsvärdet för talföljden $5, 5, 5, \ldots$ *är 5. Allmänt: Om* $x_n = x$ *för alla* n *förutom för ändligt många index, så är* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, *ty*

$$|x_n - x| = |x - x| = 0 \textit{ för stora värden på } n .$$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, *för då* $\epsilon > 0$ *så är*

$$|0 - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \epsilon \text{ , \textit{så länge} } n > \frac{1}{\epsilon} .$$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/n}{1+1/n} = 1$, *för om* $\epsilon > 0$, *så är*

$$\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| = \frac{2}{n+1} < \epsilon ,$$

då $n > \frac{2-\epsilon}{\epsilon}$.
Beräkning av den undre gränsen för n:

$$\begin{aligned}&\frac{2}{n+1} < \epsilon\\&\iff 2 < \epsilon(n + 1)\\&\iff 2 < \epsilon n + \epsilon\\&\iff 2 - \epsilon < n\epsilon\\&\iff n > \frac{2-\epsilon}{\epsilon} .\end{aligned}$$

(4) Talföljden $0, 1, 0, 1, \ldots$ *divergerar. Vi bevisar detta genom att göra ett motantagande: Talföljden* $0, 1, 0, 1, \ldots$ *konvergerar, alltså existerar det ett tal* $a \in \mathbb{R}$ *så att* $x_n \to a$, *då* $n \to \infty$. *Då finns det ett* n_ϵ *(skulle kunna betecknas* $n_{1/2}$*) så att*

$$|x_n - a| < 1/2 \text{ , \textit{då} } n > n_\epsilon .$$

Vi väljer $n > n_\epsilon$, *varvid även* $n + 1 > n_\epsilon$, *och triangelolikheten ger*

$$\begin{aligned}1 = |x_n - x_{n+1}| &= |(x_n - a) + (a - x_{n+1})|\\&\le |x_n - a| + |x_{n+1} - a| < 1/2 + 1/2 = 1 ,\end{aligned}$$

vilket är en motsägelse. Alltså är motantagandet falskt och påståendet riktigt och därmed divergerar följden $0, 1, 0, 1, 0, \ldots$.

Sats 4.1. *En talföljd kan ha högst ett gränsvärde.*

Bevis. Antag att $x_n \to a$ och $x_n \to b$. Vi påstår att $a = b$.

Vi gör ett motantagande: $a \neq b$.
Vi betecknar $\epsilon = \frac{|a-b|}{3} > 0$. Då finns det ett n'_ϵ s.a.

$$|x_n - a| < \epsilon, \text{ då } n > n'_\epsilon$$

och det finns ett n''_ϵ s.a.

$$|x_n - b| < \epsilon, \text{ då } n > n''_\epsilon .$$

Vi väljer $n_\epsilon = \max\{n'_\epsilon, n''_\epsilon\}$. Då $n > n_\epsilon$, ger triangeloikheten att

$$\begin{aligned}3\epsilon = |a - b| &\le |a - x_n| + |x_n - b|\\&< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon ,\end{aligned}$$

alltså är $3 < 2$, MS. Antitesen är alltså falsk och påståendet riktigt.

Sats 4.2. *Låt (x_n) vara en konvergent följd. Då finns det för varje $\epsilon > 0$ ett sådant tal $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ att $|x_n - x_{n+p}| < \epsilon$, då $n > n_\epsilon$ och $p \in \mathbb{N}$.*

Bevis. Antag att $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ och $\epsilon > 0$. Då existerar det ett $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ s.a.

$$|x_n - a| < \epsilon/2 \text{ , då } n > n_\epsilon \,.$$

Antag nu att $n > n_\epsilon$ och $p \in \mathbb{N}$, varvid även $n + p > n_\epsilon$. Triangelolikheten ger att

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+p}| &= |x_n - a + a - x_{n+p}| \\ &\le |x_n - a| + |a - x_{n+p}| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \,. \end{aligned}$$

Definition. En följd (x_n) är
<u>växande</u>, om $x_n \le x_{n+1}$ för alla n,
<u>strängt växande</u>, om $x_n < x_{n+1}$ för alla n,
<u>avtagande</u>, om $x_n \ge x_{n+1}$ för alla n,
<u>strängt avtagande</u>, om $x_n > x_{n+1}$ för alla n,
<u>monoton</u>, om den är växande eller avtagande och
<u>strängt monoton</u>, om den är strängt växande eller strängt avtagande.

Exempel.
Följden $1, 2, 3, \ldots$ *är strängt växande.*
Följden $1, 1/2, 1/3, \ldots$ *är strängt avtagande.*
Följden $1, 1, 1, \ldots$ *är både växande och avtagande.*
Följden $0, 1, 0, 1, \ldots$ *är inte monoton.*

Delföljd. Följden (y_k) är en <u>delföljd</u> till följden (x_n), om $y_k = x_{n_k}$, där det gäller att $n_1 < n_2 < \cdots$. Då vi tar bort en del av termerna från den ursprungliga följden (kvar blir fortfarande oändligt många termer) så är den kvarblivna följden alltså en delföljd till den ursprungliga följden. Märk dock, att en följd alltid utgör sin egen delföljd.

Anmärkning. $n_k \ge k$. *Bevisas med induktion.*

Exempel. *Följden* $0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ *divergerar, men dess delföljd* $0, 0, 0, 0, \ldots$ *konvergerar.*

Sats 4.3. *Om följden (x_n) konvergerar mot talet a, så konvergerar alla dess delföljder mot talet a.*

Bevis. Antag att (y_k) är en delföljd till följden (x_n) och att $y_k = x_{n_k}$, då $n_k \ge k$. Låt $\epsilon > 0$. Då finns det ett n_ϵ s.a.

$$|x_n - a| < \epsilon \text{ , då } n > n_\epsilon \,.$$

Om $k > n_\epsilon$, så är $n_k \ge k > n_\epsilon$ och därmed är

$$|y_k - a| = |x_{n_k} - a| < \epsilon \,.$$

Definition. Följden (x_n) är <u>begränsad</u>, om mängden $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ är begränsad. Med andra ord, om det existerar två tal $a, b \in \mathbb{R}$ så att $a \le x_n \le b$ för alla n.

Exempel.

$$\begin{aligned} &1, 2, 3, 4, \ldots \ \textit{är inte en begränsad följd.} \\ &1, 2, 1, 2, \ldots \ \textit{är en begränsad följd.} \\ &1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots \ \textit{är en begränsad följd.} \end{aligned}$$

Sats 4.4. *En konvergent följd är alltid begränsad.*

Bevis. Vi antar att följden (x_n) konvergerar mot talet a. Vi väljer $\epsilon = 1$. Nu existerar det ett n_1 så att

$$|x_n - a| < 1 \text{ , då } n > n_1 \,.$$

Då $n > n_1$ gäller

$$|x_n| \le |x_n - a| + |a| \le 1 + |a| \,.$$

enligt triangelolikheten.

Hur är det då $n \le n_1$? Eftersom mängden $\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_1}|\}$ är ändlig, så finns det ett tal $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_1}|\}$.

Alltså gäller för alla $n \in \mathbb{N}$ att

$$|x_n| \le \max\{M, 1 + |a|\} \,.$$

Anmärkningar.

(1) Det motsatta resultatet gäller inte! Som motexempel fungerar till exempel följden $0, 1, 0, 1, \ldots$ *, som är klart begränsad, men som ändå inte konvergerar.*

(2) Eftersom följden $1, 2, 3, \ldots$ *inte är begränsad, så konvergerar den inte enligt föregående sats.*

Följande sats är mycket användbar!

Sats 4.5. Principen om olikheters invarians. *Antag att (x_n) och (y_n) är konvergenta följder och att $x_n \le y_n$ för alla n. Då är*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n \,.$$

Anmärkning. *Observera dock, att följande inte gäller:*

$$x_n < y_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n \,.$$

Som exempel duger följande: Låt $x_n = 0$ för alla n och $y_n = \frac{1}{n}$. Då är

$$x_n < y_n \quad \forall n \quad \textit{MEN} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n \,.$$

Bevis. Låt $x_n \to a$ och $y_n \to b$. Påståendet är nu alltså att $a \le b$.

Vi gör en antites: $a > b$.

Vi betecknar $\epsilon = \frac{a-b}{3} > 0$. Då existerar det ett sådant n'_ϵ att

$$|x_n - a| < \epsilon \,, \text{ då } n > n'_\epsilon$$

och det finns ett n''_ϵ s.a.

$$|y_n - b| < \epsilon \,, \text{ då } n > n''_\epsilon \,.$$

Vi väljer $n_\epsilon = \max\{n'_\epsilon, n''_\epsilon\}$. Då $n > n_\epsilon$ är

$$\begin{aligned} &y_n - x_n < b + \epsilon - (a - \epsilon) = b - a + 2\epsilon = -\epsilon < 0 \\ &\Longrightarrow y_n < x_n \,, \end{aligned}$$

så vi har fått en motsägelse. Därmed är antitesen falsk och påståendet riktigt.

Korollarium för principen om olikheters invarians 4.6. *Låt* $x_n \to a$ *och* $x_n \le M$ *för alla* $n \in \mathbb{N}$. *Då är* $a \le M$.

Bevis. Då vi väljer $y_n = M$ för alla $n \in \mathbb{N}$ i sats 4.5, så får vi $y_n \to M$.

Sats 4.7. [Myrberg, Sats 2.3.4] *Antag att*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b\,.$$

Då är

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$$
$$(2)\ \lim_{n\to\infty}(rx_n)=ra,\ \text{där } r\in\mathbb{R} \text{ är en konstant}$$
$$(3)\ \lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=ab$$
$$(4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}\,,b\neq 0\,,y_n\neq 0\,.$$

Bevis. Se beviset för Myrberg, Sats 2.3.4.

Punkt (1):

Låt $\epsilon > 0$. Då finns det ett $n_\epsilon^{'}$ så att

$$|x_n - a| < \epsilon/2\,,\ \text{då } n > n'_\epsilon$$

och det finns ett $n_\epsilon^{''}$ s.a.

$$|y_n - b| < \epsilon/2\,,\ \text{då } n > n_\epsilon^{''}\,.$$

Vi väljer $n_\epsilon = \max\{n_\epsilon^{'}, n_\epsilon^{''}\}$. Med stöd av triangelolikheten får vi, då $n > n_\epsilon$

$$\begin{aligned}&|(x_n+y_n)-(a+b)| \le |a-x_n| + |y_n-b|\\ &<\epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon\,,\end{aligned}$$

alltså $x_n + y_n \to a + b$.

Punkt (2) följer av punkt (3), då $y_n = r$ för alla n.

Bevis för punkt (3):

$$\begin{aligned}&|x_ny_n - ab| = |x_ny_n - ay_n + ay_n - ab|\\ &= |(x_n-a)y_n + a(y_n-b)| \le |(x_n-a)y_n| + |a(y_n-b)|\\ &\le |x_n-a||y_n| + |a||y_n-b|\,,\end{aligned}$$

där följden (y_n) är konvergent och således begränsad enligt Sats 4.4 [Myrberg, Sats 2.3.2]. Därmed existerar det ett $M > 0$ s.a. $|y_n| \le M$ för alla n. Vi kan dessutom välja $M > |a|$.

Låt $\epsilon > 0$. Då existerar det ett $n_\epsilon^{'}$ så att

$$|x_n - a| < \epsilon/2M\,,\ \text{då } n > n'_\epsilon$$

och ett $n_\epsilon^{''}$ s.a.

$$|y_n - b| < \epsilon/2M\,,\ \text{då } n > n_\epsilon^{''}\,.$$

Vi väljer $n_\epsilon = \max\{n_\epsilon^{'}, n_\epsilon^{''}\}$. Då $n > n_\epsilon$ ger triangelolikheten att

$$|x_ny_n - ab| \le M\epsilon/2M + M\epsilon/2M\ = \epsilon.$$

Påståendet är bevisat.

Bevis för punkt (4):

Med stöd av punkt (3) räcker det att visa att

$$\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{b}\,.$$

Obs. $b \neq 0$.

$$\Big|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\Big| = \frac{|b-y_n|}{|y_n||b|}\,.$$

Låt $\epsilon > 0$. Då finns det ett $n_\epsilon^{'}$ så att

$$|y_n - b| < \epsilon\,,\ \text{då } n > n'_\epsilon.$$

Speciellt finns det ett n_1 s.a.

$$|y_n - b| < |b|/2\,,\ \text{då } n > n_1.$$

För dessa n gäller att

$$\begin{aligned}&|y_n| = |b-(b-y_n)|\\ &\ge |b| - |b-y_n| \ge |b| - |b|/2 = |b|/2\,.\end{aligned}$$

Alltså har vi att

$$\Big|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\Big| \le |b-y_n|\frac{2}{|b|^2}\,.$$

Eftersom $y_n \to b$, så existerar det ett n_2 s.a.

$$|y_n - b| < \epsilon|b|^2/2\,,\ \text{då } n > n_2\,.$$

Då $n > \max\{n_1, n_2\}$, så är

$$\Big|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\Big| < \epsilon\,.$$

Exempel. *(1)*

$$\frac{n}{1+n} = \frac{1}{1+1/n} \to \frac{1}{1+0} = 1,\ \text{då } n \to \infty.$$

(2)

$$\frac{2+n}{3+4n+5n^2} = \frac{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}}{\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n}+5} \to \frac{0+0}{0+0+5} = \frac{0}{5} = 0,\ \text{då } n\to\infty.$$

Sats 4.8. *Låt (x_n) vara en växande talföljd. Då är följande påståenden ekvivalenta:*

(1) *talföljden (x_n) konvergerar.*
(2) *talföljden (x_n) är begränsad.*
(3) *talföljden (x_n) är uppifrån begränsad.*

Dessutom är

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}\,.$$

Bevis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Vi har tidigare bevisat, att en konvergent följd alltid är begränsad, Sats 4.4 [Myrberg, Sats 2.3.2].

(2) $\Longrightarrow$ (3): Klar.

Det räcker alltså att visa att (3) $\Longrightarrow$ (1):

Vi antar att (3) gäller. Då existerar $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\} = G$. Vi påstår att $x_n \to G$. Låt $\epsilon > 0$. Då existerar det ett n_0 s.a. $x_{n_0} > G - \epsilon$, [Myrberg, Sats 1.4.3]. Då $n \geq n_0$, är

$$G - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq G$$

Därmed är

$$|x_n - G| < \epsilon\,.$$

Motsvarande resultat gäller för avtagande följder:

Sats 4.9. *Antag att (x_n) är en avtagande talföljd. Då är följande påståenden ekvivalenta:*

(1) *talföljden (x_n) konvergerar.*
(2) *talföljden (x_n) är begränsad.*
(3) *talföljden (x_n) är nerifrån begränsad.*

Dessutom är

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}\,.$$

Lösningsmetoden för följande exempel är viktig:

Exempel. [Uppgift i mellanförhör 1994]

Uppgift: Låt $x_1 > 0$ och $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$, $n \geq 1$. Visa, att det existerar ett gränsvärde $\lim_{n\to\infty} x_n$ och bestäm detta gränsvarde.

Lösning:

$$x_1 > 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{x_1}{1+x_1} > 0 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow x_n > 0 \quad \forall n\,.$$

Alltså är följden (x_n) nerifrån begränsad.

Eftersom

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n} < \frac{x_n}{1+0}\,,$$

så är följden (x_n) avtagande.

Därmed existerar gränsvärdet, och vi betecknar $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Vi får

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1+x_n} = \frac{a}{1+a}\,.$$

och vidare är

$$\begin{aligned} a &= \frac{a}{1+a} \Longrightarrow \\ a + a^2 &= a \Longrightarrow \\ a^2 &= 0 \Longrightarrow \\ a &= 0\,. \end{aligned}$$

Anmärkning. *Ofta lönar det sig att först definiera $x = \lim x_n$, fastän man inte vet om det existerar eller inte; talet ifråga är det enda möjliga gränsvärdet. För att visa att följden (x_n) är begränsad kan vi använda talet x (som övre eller undre gräns, beroende på ifall serien är växande ellet avtagande). Existensen för gränsvärdet måste dock ALLTID bevisas!*

Nepers tal e. *I skolan visades det att*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Vi visar, att gränsvärdet existerar och mera allmänt, att

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Sats 4.10. *Låt $x \in \mathbb{R}$. Då existerar*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Bevis. Vi betecknar

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Del I: Vi visar, att (x_n) är växande för de n, för vilka $n > |x|$.

Antag att $n > |x|$.

Eftersom

$$1 + \frac{x}{n} \geq 1 - \frac{|x|}{n} > 1 - 1 = 0\,,$$

så är $x_n > 0$.

Nu är

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) a^{n+1}\,,$$

där

$$a = \frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{[(n+1+x)n + x] - x}{(n+1)(n+x)} = 1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)} =: 1 - t\,.$$

Om $x \le 0$, så är
$$\frac{x}{(n+1)(n+x)} \le 0\,,$$
ty $n+x>0$. Om $x>0$, så är
$$\frac{x}{(n+1)(n+x)} < \frac{1}{n+1} < 1\,,$$
ty $n+x>x$.

$-t>-1$ gäller alltid.

Av Bernoullis olikhet följer, att
$$(1-t)^{n+1} \ge 1-(n+1)t = 1-\frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x}\,.$$
Alltså är
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = (1+\frac{x}{n})(1-t)^{n+1} \ge (1+\frac{x}{n})\frac{n}{n+x} = 1\,.$$
Därmed är $x_n \le x_{n+1}$. Del I är alltså bevisad.

Del II: Vi visar härnäst att följden (x_n) är uppifrån begränsad.

$$\begin{aligned} &(1+\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n}) = 1-\frac{x^2}{n^2} \le 1 \\ \Longrightarrow\quad &(1+\frac{x}{n}) \le (1-\frac{x}{n})^{-1}\ ,\ \text{då } n>|x| \end{aligned}$$

$$x_n = (1+\frac{x}{n})^n \le (1-\frac{x}{n})^{-n}\ ,\ \text{då } n>|x|$$

Vi betecknar: $k=$ det minsta heltalet, för vilket $k>|x|$ gäller.

Påstående I implicerar, då vi substituerar $x\to -x$, att följden $(1-\frac{x}{n})^n$ är växande, då $n\ge k$. Alltså är
$$(1-\frac{x}{n})^n \ge (1-\frac{x}{k})^k\ ,\ \text{då } n\ge k\,.$$

Då har vi att
$$(1-\frac{x}{n})^{-n} \le (1-\frac{x}{k})^{-k} =: M,\ \text{för alla } n\ge k\,,$$
och således är $x_n \le M$ för alla $n\ge k$.

Även del II är bevisad.

Anmärkning. *Då vi nu substituerar $x=1$, får vi det sk.* <u>*Nepers*</u> <u>*tal*</u>
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Anmärkning. *Skotten John Napier (Neper) (1550–1617) uppfann logaritmerna.*

Instängningssatsen 4.11. *Antag att $x_n \le y_n \le z_n$ för alla $n\in\mathbb{N}$ och att $\lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} z_n$. Då har vi att $y_n\to a$.*

Bevis. Låt $\epsilon>0$. Då existerar det ett n_0 s.a.
$$|x_n-a|<\epsilon \text{ och } |z_n-a|<\epsilon\ ,\ \text{då } n>n_0\,.$$
För dessa n är
$$a-\epsilon < x_n \le y_n \le z_n < a+\epsilon\,,$$
och således är

$|y_n-a|<\epsilon$.

Exempel. *Bestäm $\lim_{n\to\infty} y_n$, då*
$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\,.$$
Vi antar, att kvadratrotens ($\sqrt{\ }$) egenskaper är kända.

Lösning:
$$y_n \ge \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} =: x_n\,,$$
och
$$y_n \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} =: z_n\,.$$
I följande uträkning behövs kontinuiteten för kvadratrotsfunktionen!
$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{\sqrt{1}} = 1,\ \text{då } n\to\infty.$$
$$z_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to \frac{1}{\sqrt{1}} = 1,\ \text{då } n\to\infty.$$
Instängningssatsen ger att $y_n\to 1$.

FÖLJANDE TVÅ SATSER ÄR VIKTIGA!

Sats 4.12. *Varje talföljd har en monoton delföljd.*

Bevis. Låt (x_n) vara en följd. Vi betecknar
$$S = \{n\in\mathbb{N} | x_n \le x_m \text{ för varje } m>n\}\,.$$

Fall 1. S är en oändlig mängd.
$$S = \{n_1, n_2, \dots\},\ \text{där } n_1<n_2<\cdots$$
I denna är alltså $n_1=\min S$, $n_2=\min(S\setminus\{n_1\})$, ...

Om $n_k\in S$, så är $x_{n_k}\le x_m$ för alla $m\ge n_k$. Således är
$$x_{n_k} \le x_{n_{k+1}}\,.$$

Fall 2. S är en ändlig mängd.

Om $S = \emptyset$, så väljer vi $n_1 = 1$.
Om $S \neq \emptyset$, så väljer vi $n_1 = \max S + 1$.
Då är $n_1 > n\ \forall n \in S$.
$n_1 \notin S$, alltså $x_{n_1} \le x_m \forall m > n_1$ gäller inte.
Således $\exists n_2 > n_1$, för vilket $x_{n_2} < x_{n_1}$.
$n_2 \notin S$, alltså $x_{n_2} \le x_m \forall m > n_2$ gäller inte.
Således $\exists n_3 > n_2$, för vilket $x_{n_3} < x_{n_2}$.
Vi antar att vi har hittat talen $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, för vilka $x_{n_1} > \cdots > x_{n_k}$.
$n_k \notin S$, alltså $x_{n_k} \le x_m \forall m > n_k$ gäller inte.
Således $\exists n_{k+1} > n_k$, för vilket $x_{n_{k+1}} < x_{n_k}$.
Vi har alltså fått en avtagande följd (x_{n_k}).

Bolzano-Weierstrass Sats.
En begränsad följd har alltid en konvergent delföljd.

Bevis. Antag att (x_n) är en begränsad talföljd. Enligt Sats 4.12 har den en monoton delföljd (y_n).
Denna delföljd (y_n) är också begränsad.
Alltså vi har en begränsad, monoton delföljd (y_n). Vi har tidigare bevisat en sats (Myrberg, Sats 2.4.1), enligt vilken följden (y_n) nu konvergerar.

Anmärkning. *Märk att Sats* 4.12 *och Bolzano-Weierstrass Sats saknas från Myrbergs bok, fastän de är väldigt viktiga!*

Cauchys kriterium 4.13. *Låt (x_n) vara en talföljd. Då är följande påståenden ekvivalenta:*

(1) *Talföljden (x_n) konvergerar.*
(2) $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *s.a.* $|x_n - x_{n+p}| < \epsilon$, *då* $n > n_0$ *och* $p \in \mathbb{N}$.
(3) $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *s.a.* $|x_n - x_k| < \epsilon$, *då* $n > n_0$ *och* $k > n_0$.

Anmärkningar. *(1) I villkoren (2) och (3) för Cauchys kriterium 4.13 förekommer inte något gränsvärde överhuvudtaget!*
Konvergensen bestäms genom att undersöka avstånden mellan talen x_n.

(2) Cauchys kriterium gäller inte i mängden $\mathbb{Q}$. Vi kan till exempel välja följden $x_n \in \mathbb{Q}$, för vilken $x_n \to \sqrt{2}$. Då gäller (2) och (3), men följden (x_n) konvergerar inte i $\mathbb{Q}$.

(3) Augustin L. Cauchy (1789–1857) var fransk.

Beviset för Cauchys kriterium.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) Klart

(1) $\Longrightarrow$ (2) Klart, eftersom vi bevisade detta tidigare, [Myrberg, Sats 2.2.1].

Det räcker alltså att visa att (3) $\Longrightarrow$ (1).
Vi antar alltså att (3) gäller.
Vi tillämpar punkt (3), då $\epsilon = 1$, varvid vi får ett n_1 s.a. $|x_n - x_{n_1+1}| < 1$, då $n > n_1$.
Alltså är

$$|x_n| \le |x_n - x_{n_1+1}| + |x_{n_1+1}| \le 1 + |x_{n_1+1}|,$$

för alla $n > n_1$. För alla $n \in \mathbb{N}$ gäller därmed att

$$|x_n| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_1}|, 1 + |x_{n_1+1}|\} = M.$$

Med stöd av Bolzano-Weierstrass Sats hittar vi en konvergent delföljd (x_{n_j}) och således existerar det ett $a \in \mathbb{R}$ s.a.

$$x_{n_j} \to a \text{ , då } j \to \infty.$$

Vi visar att $x_n \to a$.

Bevis.
Låt $\epsilon > 0$. Enligt punkt (3) finns det ett n_0 s.a. $|x_n - x_k| < \epsilon/2$, då $n > n_0$ och $k > n_0$.
Eftersom $x_{n_j} \to a$, så finns det ett j, för vilket $n_j > n_0$ och $|x_{n_j} - a| < \epsilon/2$. Då $n > n_0$, så är

$$|x_n - a| \le |x_n - x_{n_j}| + |x_{n_j} - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Alltså har vi att $x_n \to a$.
Påståendet är bevisat.

Definition. Talföljden (x_n) växer obegränsat, om det för varje tal $M \in \mathbb{R}$ finns ett index n_M för vilket $x_n > M$, då $n > n_M$. Med andra ord är talen i följden (x_n) större än vilket som helst givet tal, så länge indexet n_M är tillräckligt stort. Då betecknar vi

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \text{ eller } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Anmärkning. *Symbolen ∞ är inte ett tal. Om $x_n \to \infty$, så divergerar följden.*

Definition. Talföljden (x_n) avtar obegränsat, om det för varje tal $m \in \mathbb{R}$ finns ett index n_m så att $x_n < m$, då $n > n_m$. Då betecknar vi

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Exempel.

(1)
$\lim_{n\to\infty} n = \infty$, *eftersom $n > M$, då $n > M$.*
(2)
$\lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty$.
(3)
$\lim_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty$.
(4)
Följden $(x_n) = (-2)^n$ varken växer eller avtar obegränsat, men $|x_n| = 2^n \to \infty$.

Sats 4.14. *Låt $x_n > 0$. Då är*

$$x_n \to \infty \iff \frac{1}{x_n} \to 0.$$
$$x_n \to 0 \iff \frac{1}{x_n} \to \infty\,.$$

Bevis. Se Räkneövningsuppgifterna 4.7 och 4.8.

Exempel 4.15. *Låt $a \in \mathbb{R}$. Vi undersöker följden $(x_n) = a^n$. Då är*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{om } |a| < 1 \\ 1, & \text{om } a = 1 \\ \infty, & \text{om } a > 1 \\ \nexists, & \text{om } a \le -1 \end{cases}$$

Bevis.

Om $a = 1$ så är $\lim x_n = \lim 1^n = 1$.

Om $a > 1$ så är $a = 1 + p$, där $p > 0$. Låt $M > 0$. Bernoullis olikhet ger oss

$$a^n = (1+p)^n \ge 1 + np > M\,,$$

då $n > (M-1)/p$. Alltså är $\lim x_n = \infty$.

Fallet $|a| < 1$. Antag att $|a| = \frac{1}{1+p}$, där $p > 0$. Låt $\epsilon > 0$. Bernoullis olikhet ger oss

$$|0 - a^n| = |a^n| = |a|^n$$
$$= \frac{1}{(1+p)^n} \le \frac{1}{1+np} < \epsilon\,,$$

då $n > (\frac{1}{\epsilon} - 1)/p$. Alltså $\lim a^n = 0$.

Fallet $a = -1$. Då är $(a^n) = -1, 1, -1, 1, \ldots$, så följden divergerar, ty Cauchys villkor gäller inte, eftersom $|a_m - a_{m+1}| = 2$ för alla $m \in \mathbb{N}$.

Slutligen, om $a < -1$, är $\lim a^{2n} = \infty$ och $\lim a^{2n+1} = -\infty$. Därmed divergerar följden (a^n).

5. GRÄNSVÄRDET FÖR EN FUNKTION

Definition. Antag att $A \subset \mathbb{R}$, att $f : A \to \mathbb{R}$ och att $U(x_0, r)\setminus\{x_0\} \subset A$. Med andra ord, att funktionen f är definierad i en punkterad omgivning till punkten x_0. Vi säger att funktionen f har ett gränsvärde a i punkten x_0, om det för alla $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ då } 0 < |x_0 - x| < \delta\,,$$

dvs. om

$$f(x) \in U(a, \epsilon)\,, \text{ då } x \in U(x_0, \delta)\setminus\{x_0\}\,.$$

Ovan är $\delta < r$.

Då betecknar vi

$$f(x) \to a\,, \text{ då } x \to x_0$$

eller

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a\,.$$

Exempel.

(1) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Då är

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0\,.$$

(2) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Då är

$$\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2\,.$$

Bevis. Låt $\epsilon > 0$. Då är

$$|f(x) - x_0^2| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|\,.$$

Antag att $|x - x_0| < 1$. Nu är

$$|x + x_0| = |x - x_0 + x_0 + x_0|$$
$$\le |x - x_0| + 2|x_0| \le 1 + 2|x_0| =: M\,.$$

Således är

$$|f(x) - x_0^2| \le |x - x_0|M < \epsilon\,,$$

så länge

$$0 < |x - x_0| < \frac{\epsilon}{M}\,.$$

Alltså väljer vi $\delta = \frac{\epsilon}{M}$.

(3) Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, då $x \ne 1$ och $f(1) = 19$. Då är

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1\,.$$

Liknande bevis som ovan.

Anmärkningar. *(1) Funktionen f måste vara definierad i någon omgivning till punkten x_0, förutom i punkten x_0, där den inte behöver vara definierad. Observera alltså, att det möjliga värdet för funktionen f i punkten x_0 inte påverkar gränsvärdet för funktionen.*
(2) Talet δ är vanligtvis beroende av talet ϵ.

Sats 5.1. *Funktionen f kan ha högst ett gränsvärde i punkten x_0.*

Bevis. Antag att gränsvärdena a och b existerar. Vi påstår att $a = b$.

Vi gör ett motantagande: $a \neq b$.
Vi betecknar $\epsilon = \frac{|a-b|}{3} > 0$. Då finns det ett $\delta_1 > 0$ så att

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ då } 0 < |x - x_0| < \delta_1\,,$$

och ett $\delta_2 > 0$ så att

$$|f(x) - b| < \epsilon\,, \text{ då } 0 < |x - x_0| < \delta_2\,,$$

Vi väljer $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vi väljer talet x s.a. $0 < |x - x_0| < \delta$. Då ger triangelolikheten att

$$\begin{aligned} 3\epsilon &= |a-b| = |a - b + f(x) - f(x)| \leq |a - f(x)| + |f(x) - b| \\ &< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon\,, \end{aligned}$$

och således är $3 < 2$, MS. Alltså är antitesen falsk och det ursprungliga påståendet är sant.

Anmärkning. *Beteckningen*

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x)\,.$$

är meningsfull, eftersom gränsvärdet är entydigt.

Sats 5.2. *Antag att $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existerar. För alla $\epsilon > 0$ finns det då ett $\delta > 0$ s.a.*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \text{ då } x_1, x_2 \in U(x_0, \delta)\backslash\{x_0\}\,.$$

Bevis. Vi betecknar

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x)\,.$$

Då finns det ett $\delta > 0$ så att

$$|f(x) - a| < \epsilon/2\,, \text{ då } 0 < |x - x_0| < \delta\,.$$

Då $x_1, x_2 \in U(x_0, \delta)\backslash\{x_0\}$, får vi att

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq |a - f(x_1)| + |f(x_2) - a| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\,. \end{aligned}$$

Funktioners gränsvärden kan ibland uttryckas m.h.a. talföljders gränsvärden såsom beskrivs i följande sats:

Sats 5.3. *Låt f vara definierad i den punkterade omgivningen $U(x_0, r)\backslash\{x_0\}$ till punkten x_0 och antag att $a \in \mathbb{R}$. Då är följande påståenden ekvivalenta:*

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$

(2) $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$ *för varje följd (x_n), för vilken $x_n \in U(x_0, r)\backslash\{x_0\}$ $\forall n$ och $x_n \to x_0$.*

Anmärkning. *$x_n \neq x_0$.*

Bevis för sats 5.3. (1) $\Longrightarrow$ (2):
Låt (x_n) vara en följd, $x_n \in U(x_0, r)\backslash\{x_0\}$, $x_n \to x_0$.
Vi påstår att $f(x_n) \to a$, då $n \to \infty$.
Bevis: Låt $\epsilon > 0$. Då finns det ett $\delta > 0$ s.a.

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ då } 0 < |x - x_0| < \delta\,.$$

Eftersom $x_n \to x_0$, $\exists n_0$ s.a.

$$0 < |x_n - x_0| < \delta\,, \text{då } n > n_0\,.$$

För dessa n gäller

$$|f(x_n) - a| < \epsilon\,.$$

(2) $\Longrightarrow$ (1):
Vi gör en antites, och antar att (1) inte gäller. Då existerar det ett $\epsilon > 0$, för vilket det inte finns ett motsvarande tal δ. Ingen av talen $1/n$ duger alltså som δ. För alla $n \in \mathbb{N}$ finns det ett $x_n \in U(x_0, r)\backslash\{x_0\}$, för vilket

$$|x_n - x_0| < 1/n \quad \text{och} \quad |f(x_n) - a| \geq \epsilon\,,$$

men eftersom $x_n \to x_0$, så följer det av (2) att $f(x_n) \to a$, då $n \to \infty$, MS. Därmed gäller (1).

Med hjälp av sats 5.3 bevisar vi:

Sats 5.4. *Låt*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{och} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = b \quad \text{och} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Då är

(1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$.

(2) $\lim_{x \to x_0} (tf(x)) = ta$, *där $t \in \mathbb{R}$ är en konstant.*

(3) $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = ab$.

Om $b \neq 0$, så är

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}\,.$$

Bevis. Vi använder Sats 5.3. Låt $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Av Sats 5.3 följer att [Myrberg, Sats 2.8.3]

$$f(x_n) \to a \quad \text{och} \quad g(x_n) \to b\,, \text{ då } n \to \infty\,.$$

Då är [Myrberg, Sats 2.3.4]

$$f(x_n) + g(x_n) \to a + b\,, \text{ då } n \to \infty\,.$$

Igen, enligt föregående sats [Myrberg, Sats 2.8.3] har vi att

$$f(x) + g(x) \to a + b\,, \text{ då } x \to x_0\,.$$

De övriga punkterna bevisas på samma sätt.

Definition. En reell funktion är <u>begränsad</u> i mängden A, om det existerar ett $M > 0$ så att $|f(x)| \leq M$ för alla $x \in A$.

Exempel. *$f(x) = 1/x$ är begränsad i mängden $[1, \infty[$, men f är inte begränsad i mängden $]0, \infty[$.*

Sats 5.5. *Om funktionen f har ett gränsvärde i punkten x_0, så är f begränsad i någon punkterad omgivning $U(x_0, r)\backslash\{x_0\}$ till punkten x_0.*

Bevis. Antag att

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a\,.$$

Vi väljer $\epsilon = 1$. Enligt gränsvärdets definition finns det då ett $\delta > 0$ s.a.

$$|f(x) - a| < 1\,, \text{ då } x \in U(x_0, \delta)\backslash\{x_0\}\,.$$

Men för dessa värden för x är

$$|f(x)| = |f(x) - a + a| \leq |f(x) - a| + |a| < 1 + |a|\,.$$

Ensidiga gränsvärden. Låt $\eta > 0$. Antag att f är en funktion som är definierad i invervallet $(x_0 - \eta, x_0)$. Talet a är det <u>vänstra</u> <u>gränsvärdet</u> för funktionen f i punkten x_0, och vi betecknar

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = a\,,$$

ifall det för varje tal $\epsilon > 0$ finns ett sådant tal $\delta > 0$ att

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ då } x \in (x_0 - \delta, x_0)\,.$$

Låt $\eta > 0$. Antag att f är en funktion som är definierad i intervallet $(x_0, x_0 + \eta)$. Talet a är det <u>högra</u> <u>gränsvärdet</u> för funktionen f i punkten x_0, och vi betecknar

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = a\,,$$

ifall det för varje tal $\epsilon > 0$ finns ett sådant tal $\delta > 0$ att

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ då } x \in (x_0, x_0 + \delta)\,.$$

Sats 5.6. *För funktionen f gäller*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a\,,$$

om och endast om

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = a = \lim_{x \to x_0+} f(x)\,.$$

Bevis. $\Longrightarrow$: Denna riktning är klar.
$\Longleftarrow$: Låt $\epsilon > 0$. Då existerar det ett $\delta_1 > 0$ så att

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ då } x \in (x_0 - \delta_1, x_0)\,.$$

Då finns det också ett $\delta_2 > 0$ så att

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ då } x \in (x_0, x_0 + \delta_2)\,.$$

Vi väljer $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, varvid vi får

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ då } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}\,. \text{ Alltså är } \lim_{x \to x_0} f(x) = a\,.$$

Anmärkning. *Det vänstra och högra gränsvärdet kan existera i punkten x_0 utan att gränsvärdet skulle existera i punkten x_0. Exempelvis om*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{då } x < 0 \\ 100, & \text{då } x > 0\,, \end{cases}$$

så är

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = 100\,,$$

och därmed existerar inte $\lim_{x \to 0} f(x)$, fastän de ensidiga gränsvärdena existerar.

Gränsvärden i oändligheten. Talet a är ett gränsvärde i oändligheten för funktionen f, alltså

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a\,,$$

om det för varje tal $\epsilon > 0$ finns ett tal M_ϵ så att

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ då } x > M_\epsilon\,.$$

På motsvarande sätt är talet a ett gränsvärde för funktionen f i $-\infty$, alltså

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a\,,$$

om det för varje tal $\epsilon > 0$ finns ett tal m_ϵ så att

$$|f(x) - a| < \epsilon\,, \text{ då } x < m_\epsilon\,.$$

Oändligt gränsvärde. Funktionen f har gränsvärdet ∞ i punkten x_0, alltså

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty\,,$$

om det för varje tal M finns ett sådant tal $\delta > 0$ att

$$f(x) > M\,,\ \text{då } 0 < |x - x_0| < \delta\,.$$

På motsvarande sätt definierar vi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\,.$$

Lemma 5.7. *Låt $f(x) > 0$ för alla x. Då är*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0\,,$$

om och endast om

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = \infty\,,$$

där α kan vara av typen x_0, x_0+, x_0-, ∞, $-\infty$.

Bevis. Detta är Räkneövningsuppgift 6.1.

Exempel 5.8. *(På sätt och vis en liten sats.)*

$$\lim_{x\to\infty} x^p = \begin{cases} \infty, & \text{om } p \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{om } p = 0 \\ 0, & \text{om } p \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Vi bevisar varje fall skilt för sig:

(1) Om $p \in \mathbb{N}$, och $x \ge 1$, så är $x^p \ge x$. Nämligen, hur stort $M > 1$ vi än skulle välja, är $x^p > M$ då $x > M$. Således är

$$\lim_{x\to\infty} x^p = \infty\,,\ \text{då } p \in \mathbb{N}\,.$$

(2) Om $p = 0$, så är $x^p = 1$ för alla $x \ne 0$, och därmed är

$$\lim_{x\to\infty} x^0 = 1\,.$$

(3) Om $p \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0$, så är $x^p = \frac{1}{x^m}$, där $m = -p$. Alltså får vi enligt det första fallet att

$$\lim_{x\to\infty} x^p = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^m} = \frac{1}{\infty} = 0\,.$$

Gränsvärdet för en monoton funktion. En funktion f är:

<u>Växande</u>, om $f(x_1) \le f(x_2)$ alltid när $x_1 < x_2$.
<u>Strängt</u> <u>växande</u>, om $f(x_1) < f(x_2)$ alltid när $x_1 < x_2$.
<u>Avtagande</u>, om $f(x_1) \ge f(x_2)$ alltid när $x_1 < x_2$.
<u>Strängt</u> <u>avtagande</u>, om $f(x_1) > f(x_2)$ alltid när $x_1 < x_2$.

Växande och avtagande funktioner kallas <u>monotona</u> funktioner. En funktion är <u>strängt</u> <u>monoton</u>, om den är strängt växande eller strängt avgtagande. Observera, att exempelvis den konstanta funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5$, är både växande och avtagande i hela $\mathbb{R}$.

Sats 5.9. *Låt $\Delta =]a, b[$. Vi kan ha $a = -\infty$ eller $b = \infty$. Antag att $f : \Delta \to \mathbb{R}$ är växande. Nu gäller:*

(1) Om f är uppifrån begränsad, så existerar

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \sup\{f(x)|x \in \Delta\}\,.$$

(2) Om f inte är uppifrån begränsad, så är

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \infty\,.$$

(3) Om f är nerifrån begränsad, så existerar

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \inf\{f(x)|x \in \Delta\}\,.$$

(4) Om f inte är nerifrån begränsad, så är

$$\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty\,.$$

Anmärkning. *Notera beteckningarna då $b = \infty$ och $a = -\infty$; alltså $\lim_{x\to\infty}$ och $\lim_{x\to-\infty}$.*

Bevis. (1) Antag att f är uppifrån begränsad. Då existerar talet

$$G = \sup\{f(x)|x \in \Delta\}\,.$$

Låt $\epsilon > 0$. Då finns det ett $x_1 \in \Delta$, för vilket $f(x_1) > G - \epsilon$.

Då $x_1 < x < b$, så är $G - \epsilon < f(x_1) \le f(x) \le G$. Alltså är $G = \lim_{x\to b-} f(x)$.

(2) Vi antar att f inte är uppifrån begränsad. Låt $M \in \mathbb{R}$. Då $\exists x_1$ s.a. $f(x_1) > M$. Då $x_1 < x < b$, så är $M < f(x_1) \le f(x)$. Därmed är

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \infty\,.$$

Fall (3) och (4) är liknande och därför lämnas bevisen för dem som övningsuppgifter.

Anmärkning. *Motsvarande resultat gäller även för avtagande funktioner.*

Exempel. *Låt $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = 1/x$. Funktionen f är avtagande och den är inte uppifrån begränsad, men den är nerifrån begränsad. Nu är*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = \infty\,.$$

6. FUNKTIONERS KONTINUITET

Anmärkning. *En av analysens mest centrala begrepp är funktioners kontinuitet!*

Låt $A \subset \mathbb{R}$ vara en godtycklig mängd och $f : A \to \mathbb{R}$.

Kontinuitet. Antag att $x_0 \in A$. Funktionen f är kontinuerlig i punkten x_0, om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon\,, \text{ då } x \in A \text{ och } |x_0 - x| < \delta\,,$$

alltså då $x \in A \cap U(x_0, \delta)$. I annat fall är f diskontinuerlig i punkten x_0. Funktionen f är kontinuerlig, om f är kontinuerlig i varje punkt $x_0 \in A$.

Anmärkning. *Om $x_0 \notin A$, så är f varken kontinuerlig eller diskontinuerlig i punkten x_0.*

Till exempel är $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ inte diskontinuerlig i origo, fastän den ibland sägs vara det.

Specialfall. *Låt $r > 0$ vara sådant att $U(x_0, r) \subset A$. Nu är*

$$f \text{ kontinuerlig i punkten } x_0 \iff f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)\,.$$

Med andra ord, för varje tal $\epsilon > 0$ finns det ett sådant tal $\delta > 0$ att

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon\,, \text{ då } |x_0 - x| < \delta\,,$$

alltså för vilken som helst ϵ-omgivning $U(f(x_0), \epsilon)$ till $f(x_0)$ hittar vi en δ-omgivning $U(x_0, \delta)$ till x_0 så att

$$f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \epsilon)\,.$$

Detta har i själva verket använts som definition för kontinuitet i Myrbergs bok.

Kontinuitet i ett slutet intervall. Om $A = [a, b]$, så är

$$f \text{ kontinuerlig i } a \iff f(a) = \lim_{x \to a+} f(x)\,.$$

och

$$f \text{ kontinuerlig i } b \iff f(b) = \lim_{x \to b-} f(x)\,.$$

Exempel. *(1) Den konstanta funktionen $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c = f(x_0) \text{ för alla } x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

(2) Den identiska funktionen, $f(x) = x$ för alla $x \in \mathbb{R}$, är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0) \text{ för alla } x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

(3) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Då är

$$|f(x) - f(x_0)| \le \Big||x| - |x_0|\Big| \le |x - x_0|\,.$$

Vi kan alltså välja $\delta = \epsilon$ och därmed är f kontinuerlig för alla $x_0 \in \mathbb{R}$.

Styckvis kontinuitet. Antag att Δ är ett intervall. Funktionen $f : \Delta \to \mathbb{R}$ är styckvis kontinuerlig, om f är kontinuerlig förutom i ändligt många punkter, där funktionen f har ett vänster- och ett högergränsvärde.

Exempel. *Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{då } x > 0 \\ -1, & \text{då } x < 0 \\ 0, & \text{då } x = 0\,. \end{cases}$$

Funktionen f är styckvis kontinuerlig.

Sambandet mellan kontinuitet och följder.

Sats 6.1. [Myrberg, Sats 3.3.2] *Antag att $f : A \to \mathbb{R}$ och att $x \in A$. Då är f kontinuerlig i punkten x_0 om och endast om $f(x_n) \to f(x_0)$ för alla följder (x_n), för vilka $x_n \in A$ och $x_n \to x_0$.*

Bevis. Satsen bevisas såsom motsvarande sats för gränsvärden [Myrberg, Sats 2.8.3].

Exempel. *Om $x_n \to a$, så är även $|x_n| \to |a|$, ty avbildningen $x \mapsto |x|$ är kontinuerlig.*

Sats 6.2. *Antag att $f, g : A \to \mathbb{R}$ är kontinuerliga i punkten x_0. Då är $f + g$, $f - g$ och fg kontinuerliga i punkten x_0. Om $g(x_0) \neq 0$, så är $g(x) \neq 0$ för någon mängd $A \cap U(x_0, r)$ och $\frac{f}{g}\Big|_{A \cap U(x_0, r)}$ är kontinuerlig i punkten x_0.*

Bevis. Satsen bevisas med hjälp av [Myrberg, Sats 3.3.2 och 3.3.4].

Beteckning. *Låt Δ vara ett intervall. Vi betecknar*

$$\mathcal{C}(\Delta) = \{f | f : \Delta \to \mathbb{R} \text{ är kontinuerlig}\}\,.$$

Sats 6.3. *Om $f, g \in \mathcal{C}(\Delta)$, så är $f + g \in \mathcal{C}(\Delta)$ och $fg \in \mathcal{C}(\Delta)$. Om $g(x) \neq 0$ för alla $x \in \Delta$, så är $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}(\Delta)$.*

Sats 6.4. *Låt $f : A \to B$, $g : B \to C$, $C \subset \mathbb{R}$. Antag att f är kontinuerlig i punkten x_0 och att g är kontinuerlig i punkten $f(x_0)$. Då är $g \circ f$ kontinuerlig i punkten x_0.*

Bevis. Låt $\epsilon > 0$. Eftersom g är kontinuerlig i $f(x_0)$, så finns det ett δ_1 s.a.

$$|g(y) - g(f(x_0))| < \epsilon\,, \text{ då } y \in B \text{ och } |f(x_0) - y| < \delta_1\,.$$

Eftersom f är kontinuerlig i x_0, så finns det ett δ s.a.

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta_1\,, \text{ då } x \in A \text{ och } |x_0 - x| < \delta\,.$$

För dessa x gäller att

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon\,.$$

Korollarium 6.5. *En funktion som är sammansatt av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.*

Exempel. *(1) Polynomfunktionen* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ *är kontinuerlig i hela* $\mathbb{R}$.

(2) Den rationella funktionen $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *, där* P *och* Q *är kontinuerliga, är kontinuerlig i hela* $\mathbb{R}$ *förutom i* Q*:s nollställen.*

(3) Låt $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vara sådan att* $g : x \mapsto |x|$. *Antag att* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig. Då är* $h = g \circ f : x \mapsto |f(x)|$ *alltid definierad och kontinuerlig.*

Grundsatser om kontinuerliga funktioner

Följande satser är VIKTIGA satser, som måste memoreras!

Sats 6.6. *Antag att* f *är kontinuerlig i punkten* x_0 *och låt* $f(x_0) > 0$. *Då är* $f(x) > 0$ *i någon omgivning till punkten* x_0.

Bevis. Vi väljer $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. Enligt definitionen för kontinuitet hittar vi en δ-omgivning $U(x_0, \delta)$ till punkten x_0 för vilken

$$f(U(x_0,\delta)) \subset U(f(x_0),\epsilon) \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\,,$$

ty vi hittar ett $\delta > 0$ s.a.

$$|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)/2\,, \text{ då } |x_0 - x| < \delta\,.$$

Genom att spjälka upp absolutbeloppen får vi då att

$$0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}\,, \text{ när } |x_0 - x| < \delta\,.$$

Sats 6.7. *Låt* f *vara kontinuerlig i punkten* x_0 *och låt* $f(x_0) < 0$. *Då är* $f(x) < 0$ *i någon omgivning till punkten* x_0.

Bevis. Satsen bevisas på motsvarande sätt som förgående sats, genom att nu välja $\epsilon = \frac{f(x_0)}{-2} > 0$.

Bolzanos sats. *Om den kontinuerliga funktionen* f *har olika tecken i ändpunkterna till intervallet* $[a,b]$, *så finns detåtminstone en punkt* $c \in (a,b)$ *s.a.* $f(c) = 0$.

Anmärkningar. *(1) Intermediate Value Theorem.*

(2) Beviset kan göras genom att använda en antites och de två föregående satserna. Nu gör vi dock inte detta, utan vi bevisar satsen på ett annat sätt.

Beviset för Bolzanos sats. Låt till exempel $f(a) < 0$ och $f(b) > 0$. Vi betecknar

$$E = \{x \in [a,b] | f(x) < 0\}\,.$$

Eftersom $a \in E$, så är $E \neq \emptyset$, och eftersom $E \subset [a,b]$, så är E begränsad. Således existerar det ett $c = \sup E$.

Nu är $a \le c \le b$. Vi visar att $f(c) = 0$.

För alla $n \in \mathbb{N}$ finns det ett $x_n \in E$, för vilket $c - 1/n < x_n \le c$. Då har vi att $x_n \to c$ och $f(x_n) < 0$. Eftersom f är kontinuerlig, så har vi att $f(x_n) \to f(c)$. Då det vidare gäller att $f(x_n) < 0$, så är $f(c) \le 0$. Alltså är $c < b$.

Då $c < x \le b$, är $x \notin E$, ty c är en övre gräns för E. Därmed är $f(x) \ge 0$. Således är $f(c) = \lim_{x \to c+} f(x) \ge 0$.

Genom att kombinera dessa resultat får vi att $f(c) = 0$, alltså påståendet.

Följdsats till Bolzanos sats 6.8. *Antag att* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig. Då antar* f *alla värden som är mellan talen* $f(a)$ *och* $f(b)$.

Bevis. Låt $f(a) < y < f(b)$. Vi tillämpar Bolzanos sats på den kontinuerliga funktionen F, där $F(x) = f(x) - y$, $x \in [a,b]$. Eftersom $F(a) < 0$ och $F(b) > 0$, så finns det en punkt $c \in (a,b)$, för vilken $F(c) = 0$, alltså $f(c) = y$.

Exempel. *Visa att polynomet* $P(x) = x^5 - 4x - 2$ *har åtminstone ett nollställe i intervallet* $(1,2)$.

Lösning: P *är kontinuerlig i hela* $\mathbb{R}$, $P(1) = -5 < 0$ *och* $P(2) = 32 - 8 - 2 > 0$, *så med stöd av Bolzanos sats ser vi att det existerar åtminstone ett nollställe i intervallet* $(1,2)$.

Största och minsta värdet för en funktion. Antag att A är en mängd, och att $f : A \to \mathbb{R}$ är en funktion. Om

$$\max f(A) = \max\{f(x) | x \in A\} = \max_{x \in A} f(x)\,,$$

existerar, så är detta det <u>största</u> <u>värdet</u> för funktionen f.

Alltså är M det största värdet för funktionen f, om och endast om
(1) $f(x) \le M$ för alla $x \in A$,
(2) $f(x) = M$ för något $x \in A$.

På motsvarande sätt definierar vi det minsta värdet för funktionen f

$$\min f(A) = \min\{f(x) | x \in A\} = \min_{x \in A} f(x)\,.$$

Exempel. $A = (0,1)$ *och* $f(x) = x$. *Nu har funktionen* f *varken ett största eller ett minsta värde i mängden* A.

Anmärkning. *Om* $\exists \max f(A)$, *så är* f *uppifrån begränsad och*

$$\max f(A) = \sup\{f(x) | x \in A\}\,.$$

Om $\exists \min f(A)$, *så är* f *nerifrån begränsad och*

$$\min f(A) = \inf\{f(x) | x \in A\}\,.$$

Följande sats är mycket viktig!

Weierstrass min-max -sats. *Om* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig, så har funktionen* f *ett största och ett minsta värde.*

Bevis. Vi visar att det existerar ett största värde. Minsta värdet följer av detta med hjälp av funktionen $-f$.

<u>Påstående 1:</u> f är begränsad. Vi gör ett motantagande: f är inte begränsad. Alltså $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in [a,b]$, för vilket $|f(x_n)| \ge n$.

Eftersom $x_n \in [a,b]$, så är (x_n) en begränsad följd. Enligt Bolzano-Weierstrass-teoremet har följden (x_n) en konvergent delföljd $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ Alltså har vi att $x_{n_k} \to x_0$, då $n \to \infty$.

Nu är $a \le x_{n_k} \le b$ för alla k. Alltså är $a \le x_0 \le b$.

Observera att beviset skulle gå åt skogen här, i fallet av ett öppet intervall! Kom ihåg principen om olikheters invarians, Sats 4.5.

Eftersom f är kontinuerlig i punkten x_0, så finns det ett $\delta > 0$ så att

$$|f(x) - f(x_0)| < 1\,, \text{ då } x \in U(x_0,\delta) \cap [a,b]\,.$$

Eftersom $x_{n_k} \to x_0$, så finns det ett k_0 s.a.

$$|x_{n_k} - x_0| < \delta\ , \text{ då } k \geq k_0\,.$$

För dessa k är

$$|f(x_{n_k}) - f(x_0)| < 1\,.$$

Däremot är $|f(x_{n_k})| \geq n_k \to \infty$, då $k \to \infty$. Vi får alltså en motsägelse. Antitesen är således falsk och det ursprungliga påståendet är sant.

Av påstående 1 följer att

$$\sup\{f(x)|x \in [a,b]\} =: M$$

existerar.

<u>Påstående 2:</u> $f(x) = M$ för något $x \in [a,b]$.

Bevis: $\forall n \in \mathbb{N}$ finns det ett $y_n \in [a,b]$, för vilket $f(y_n) > M - 1/n$. Av Bolzano-Weierstrass-teoremet följer att det finns en konvergent delföljd (y_{n_k}), $y_{n_k} \to y_0 \in [a,b]$, då $k \to \infty$.

Eftersom f är kontinuerlig, har vi att $f(y_{n_k}) \to f(y_0)$, då $k \to \infty$.

Å andra sidan är $f(y_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k} \geq M - \frac{1}{k}$, ty $n_k \geq k$.

Då $k \to \infty$, så är $f(y_0) \geq M - 0 = M$.

Således är $f(y_0) = M$.

Exempel. *Visa att funktionen f,*

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}\,,$$

uppnår sitt största och minsta värde i $\mathbb{R}$.

Lösning: Nu kan vi inte direkt tillämpa Weierstrass min-max *-sats.*

Först konstaterar vi att f är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$ och att

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \text{ och } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,.$$

Dessutom är $f(1) = 1/2$ och $f(-1) = -1/2$. Eftersom

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,,$$

så kan vi välja ett så stort intervall $[-a,a]$, att det i $\mathbb{R} \setminus [-a,a]$ gäller att $|f(x)| < 1/2$. Enligt Weierstrass min-max *-sats finns det ett största och ett minsta värde bland funktionen f:s värden i det slutna intervallet $[-a,a]$, dvs. det existerar ett*

$$M = \max_{x\in[-a,a]} f(x) \quad \text{och ett} \quad m = \min_{x\in[-a,a]} f(x)\,.$$

Enligt föregående resultat är $M \geq 1/2$ och $m \leq -1/2$. Eftersom $-1/2 < f(x) < 1/2$ gäller utanför intervallet $[-a,a]$, så finns det ett

$$M = \max_{x\in\mathbb{R}} f(x) \quad \text{och ett} \quad m = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x)\,.$$

Sats 6.9. *Låt Δ vara ett intervall och $f : \Delta \to \mathbb{R}$ vara strängt växande. Då är f en injektion och f definierar således en bijektion $f_1 : \Delta \to f\Delta$.*

Om f dessutom är kontinuerlig, så är $f\Delta$ ett intervall och $f_1^{-1} : f\Delta \to \Delta$ är kontinuerlig och strängt växande.

Bevis. Om $x_1 < x_2$, så är $f(x_1) < f(x_2)$, ty f är strängt växande. Alltså är f en injektion. Den första delen av satsen är klar.

Antag att f är kontinuerlig. Vi betecknar nu

$$g = \inf\{f(x)|x \in \Delta\}, \text{ om } f \text{ är nerifrån begränsad; i övriga fall är } g = -\infty\,.$$

$$G = \sup\{f(x)|x \in \Delta\}, \text{ om } f \text{ är uppifrån begränsad; i övriga fall är } G = \infty\,.$$

Om f är begränsad, så är $f\Delta \subset [g,G]$. Om $g = -\infty$ eller $G = \infty$, så måste motsvarande hakparentes vändas.

<u>Påstående 1:</u> $]g,G[\subset f\Delta$.

Bevis: Låt $g < y < G$. Vi väljer $y_1, y_2 \in f\Delta$ s.a. $g < y_1 < y < y_2 < G$. Det finns tal x_1, x_2, för vilka $f(x_1) = y_1$ och $f(x_2) = y_2$. Eftersom f är växande, så är $x_1 < x_2$. Enligt Bolzanos följdsats finns det ett $x \in]x_1, x_2[$, för vilket $f(x) = y$. Alltså är $y \in f\Delta$. Således är påstående 1 bevisat och $]g,G[\subset f\Delta \subset [g,G]$ gäller.

Det senare påståendet: $f\Delta$ kan inte innehålla tal som är mindre än g eller större är G. Alltså är $f\Delta$ något av intervallen $(g,G), (g,G], [g,G), [g,G]$. Märk rättelsen i fallen ∞ och $-\infty$. Alltså är $f\Delta = \Delta'$ ett intervall.

Vidare konstaterar vi att

$$G \in \Delta' \iff b \in \Delta \quad \text{och} \quad f(b) = G\,,$$

samt att

$$g \in \Delta' \iff a \in \Delta \quad \text{och} \quad f(a) = g\,,$$

Eftersom Δ är nerifrån begränsad och har ett minsta tal a, så är $g = f(a)$. Alltså är $g \in \Delta'$.

Eftersom Δ är uppifrån begränsad och har ett största tal b, så är $G = f(b)$. Alltså är $G \in \Delta'$.

I vilket fall som helst gäller alltså att $f\Delta = \Delta'$.

Då är $f_1 : \Delta \to \Delta'$ en bijektion, och $h = f_1^{-1} : \Delta' \to \Delta$ existerar.

<u>Påstående 2:</u> h är strängt växande. Vi gör ett motantagande: Det finns två tal $y_1, y_2 \in \Delta'$, så att $y_1 < y_2$, $h(y_1) \geq h(y_2)$. Eftersom f är växande, så är $f(h(y_1)) \geq f(h(y_2))$, alltså är $y_1 \geq y_2$. MS. Då är h strängt växande.

<u>Påstående 3:</u> h är kontinuerlig. Bevis: Antag att $y \in \Delta'$ och låt $\epsilon > 0$. Vi betecknar $x_0 = h(y_0)$, varvid $f(x_0) = y_0$. Vi antar att x_0 inte är en ändpunkt. Genom att minska på talet ϵ kan vi anta att $U(x_0,\epsilon) \subset \Delta$. Av den inledande delen följer att $fU(x_0,\epsilon)$ är ett öppet intervall. Alltså existerar det ett $\delta > 0$, för vilket $U(x_0,\delta) \subset fU(y_0,\epsilon)$. Detta δ är det sökta, ty

$$\begin{aligned} |y - y_0| < \delta &\Longrightarrow y \in fU(x_0,\epsilon) \\ &\Longrightarrow y = f(x) \text{ för något } x \in U(x_0,\epsilon) \\ &\Longrightarrow x = h(y) \in U(x_0,\epsilon)\,. \end{aligned}$$

Således är h kontinuerlig i punkten y_0. Om x_0 är en ändpunkt till intervallet Δ, så är beviset nästan detsamma, dock med ensidig "omgivning".

Anmärkningar. *(1) Motsvarande sats gäller även för avtagande funktioner.*

(2) Märk att graferna $\Gamma_1 : y = f(x)$ och $\Gamma_2 : y = f^{-1}(x)$ är symmetriska med avseende på linjen $y = x$. (Rita bild!)

Funktionen $\sqrt[n]{x}$. Vi betecknar $\Delta = [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Antag att $f : \Delta \to \Delta$, $f(x) = x^n$. Funktionen f är kontinuerlig och strängt växande, $f(0) = 0$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Vi visar först att funktionen är strängt växande:

$$0 \le x_1 < x_2 \Longrightarrow 0 \le x_1^n < x_2^n \,.$$

Föregående sats ger att $f : \Delta \to \Delta$ är en bijektion och att det existerar en strängt växande, kontinuerlig invers funktion $f^{-1} : \Delta \to \Delta$. Vi betecknar denna $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Sats 6.10. *Funktionen $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ är kontinuerlig och strängt växande i intervallet $[0, \infty)$ och $\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = \infty$.*

Observera att $1^n = 1$ och därmed är $\sqrt[n]{1} = 1$.

Anmärkningar. *(1) Om n är udda, så är f strängt växande i hela $\mathbb{R}$ och kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$ samt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Vi visar att funktionen är strängt växande i intervallet $(-\infty, 0]$, då n är udda:*

$$\begin{aligned} &x_1 < x_2 \le 0 \Longrightarrow 0 \le -x_2 < -x_1 \Longrightarrow \\ &0 \le (-x_2)^n < (-x_1)^n \Longrightarrow 0 \le -x_2^n < -x_1^n \Longrightarrow \\ &x_1^n < x_2^n \le 0 \,. \end{aligned}$$

Funktionen f har alltså en kontinuerlig, strängt växande invers funktion, som är definierad i hela $\mathbb{R}$ och som vi betecknar $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Eftersom $(-\sqrt[n]{x})^n = -x$, så är $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.

(2) Om n är jämnt, så är f strängt avtagande i intervallet $(-\infty, 0]$ och den definierar en bijektion $f_1 : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$, $f_1^{-1}(y) = -\sqrt[n]{y}$.

Eftersom $(-x)^n = x^n$, så är f själv inte en bijektion.

(3) Med $\sqrt[n]{x}$ menar vi:

Ett positivt tal, då $x > 0$.
Noll, då $x = 0$.
Ett negativt tal, då $x < 0$ och n är udda.
Ingenting, då $x < 0$ och n är jämnt.

Anmärkning. *Bijektionen f kallas en homeomorfism, om både f och f^{-1} är kontinuerliga.*

7. OM FUNKTIONERS DIFFERENTIERBARHET

Derivatan av en funktion. Antag att den reella funktionen f är definierad i någon omgivning $U(x_0, r)$ till punkten x_0. Funktionen f är <u>deriverbar</u> i punkten x_0, om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

existerar och är ändligt. Uttrycket $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $(= \frac{\Delta f}{\Delta x})$ kallas <u>differenskvot</u>, och dess gränsvärde, $f'(x_0)$, ifall det existerar, kallas <u>derivatan</u> av funktionen f i punkten x_0. Derivatan i punkten x_0, $f'(x_0)$, betecknas även $Df(x_0)$ eller $\frac{df}{dx}(x_0)$. Derivatan kan även likvärdigt definieras som gränsvärdet

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \,.$$

Exempel.

(1) Vi definierar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så att $f(x) = x^2$. Då är

$$\begin{aligned} &f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2 \quad \text{och} \\ &\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 2x + h \to 2x \,, \text{ då } h \to 0 \,. \end{aligned}$$

Av detta följer att $f'(x) = 2x$ existerar för alla x, alltså gäller

$$\begin{aligned} &Df(x) = 2x, \text{ alltså är} \\ &Dx^2 = 2x \,. \\ &f'(1) = 2 \text{ alltså är } Dx^2\Big|_1 = 2 \,. \end{aligned}$$

(2) Vi definierar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så att $f(x) = |x|$. Existerar $f'(0)$?

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, \text{ då } h > 0. \\ -1, \text{ då } h < 0. \end{cases}$$

Därmed existerar inte $f'(0)$. Däremot,

$$\begin{aligned} &\text{då } x > 0, \text{ så existerar } f'(x) = 1 \text{ och} \\ &\text{då } x < 0, \text{ så existerar } f'(x) = -1. \end{aligned}$$

Ensidiga derivator. <u>Högerderivatan</u> av funktionen f i punkten x_0 definieras som gränsvärdet

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \,,$$

ifall gränsvärdet existerar och är ändligt. (Här begränsas alltså tillägget h till positiva värden.)

På motsvarande sätt definierar vi <u>vänsterderivatan</u> av funktionen f

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \,.$$

Vi konstaterar genast att f är deriverbar i punkten x_0 alltid och endast om $f'_+(x_0)$ och $f'_-(x_0)$ existerar och om $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Karakteriseringssatsen 7.1. *Funktionen f är deriverbar i punkten x_0 (och $f'(x_0) = A$), alltid och endast om tillägget till funktionen f kan skrivas i formen*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \epsilon(h)h,$$

där A är ett reellt tal, som är oberoende av talet h och $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.

Bevis. $\Longrightarrow$: Eftersom $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$, så kan vi skriva

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \epsilon(h), \text{ då } h \neq 0 \text{ och } \epsilon(0) = 0\,,$$

där $\epsilon(h) \to 0$ då $h \to 0$. Av detta följer att

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \epsilon(h)\cdot h\,,$$

och genom att nu beteckna $f'(x_0) = A$, så får vi den sökta formen.

$\Longleftarrow$: Om funktionen f kan skrivas som $f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \epsilon(h)h$, så är

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \epsilon(h)\,.$$

Eftersom $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$, så får vi att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A.$$

Funktionen f är alltså deriverbar i punkten x_0 och $f'(x_0) = A$.

Anmärkning. I den föregående karakteriseringssatsen är funktionens f tillägg $f(x_0 + h) - f(x_0)$ delat i två delar. Den viktigare delen, $f'(x_0)h$, är den sk. <u>differentialen</u> av funktionen f i punkten x_0. Termen $\epsilon(h)h$ är den så kallade <u>korrigeringstermen</u>.

Anmärkningar. (1) Antag att funktionen f är definierad i en omgivning till punkten x_0. Om f är deriverbar i punkten x_0, så är den även kontinuerlig i punkten x_0. Enligt karakteriseringssatsen (7.1) ser vi nämligen att

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \epsilon(h)h \to A\cdot 0 + 0\cdot 0, \text{ då } h \to 0,$$

så

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)\,. \quad \text{Alltså är} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

(2) En kontinuerlig funktion är inte nödvändigtvis deriverbar. Till exempel funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, är kontinuerlig, men såsom vi visade i Exempel (2), så existerar inte $f'(0)$. Detta kan även verifieras med att räkna $f'_+(0) = 1$ och $f'_-(0) = -1$. Räkna noggrannt! Därmed är f inte deriverbar i origo.

Geometrisk tolkning av derivatan. Differenskvoten

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

är riktningskoefficienten för den linje, som går genom punkterna $P = (x_0, f(x_0))$, och $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$. Rita bild!

Derivatan $f'(x_0)$ är gränsvärdet för riktningskoefficienten för denna linje, då $h \to 0$. Den linje som fås med gränsvärdet kallas <u>tangenten</u> ritad i punkten $(x_0, f(x_0))$. Tangentens riktningskoefficient är $f'(x_0)$, varvid tangentens ekvation är

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Sats 7.2. Rationella deriveringsregler. För funktionerna f och g som är deriverbara i punkten x gäller:

(1) $D(\text{konstant funktion}) = 0\,,$

(2) $D(f + g)(x) = f'(x) + g'(x)\,,$

(3) $D(cf)(x) = cf'(x)$, där c är en reell konstant,

(4) $D(fg)(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\,,$

(5) $D(\frac{f}{g})(x) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g(x)^2}$, där $g(x) \neq 0\,.$

Bevis. (1): Om $f(x) = c$, där c är en reell konstant, så är

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0, \text{ och således är } f'(x) = 0.$$

(2):

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) + g(x + h) - f(x) - g(x)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} (\frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h}) = f'(x) + g'(x)$$

(3):

$$\lim_{h\to 0} \frac{cf(x + h) - cf(x)}{h} = cf'(x)$$

(4): Vi betecknar

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x)\,.$$

Då är

$$\frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \frac{(f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$
$$= f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g$$
$$\to f(x)g'(x) + g(x)f'(x) + f'(x)\cdot 0 = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\,,$$

då $\Delta x \to 0$, ty enligt kontinuiteten för funktionen g, så gäller $\Delta g \to 0$, då $\Delta x \to 0$.

(5): Eftersom $g(x) \neq 0$ och g är kontinuerlig, så är $g(x) \neq 0$ i någon omgivning $U(x, r)$ till punkten x. Av detta följer att $\frac{f}{g}$ är definierad i omgivningen $U(x, r)$.

$$\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x) + \Delta f}{g(x) + \Delta g} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)$$
$$= \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{(f(x) + \Delta f)g(x) - f(x)(g(x) + \Delta g)}{g(x)(g(x) + \Delta g)}\right)$$
$$= \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x)g(x) + \Delta f g(x) - f(x)g(x) - f(x)\Delta g}{g(x)(g(x) + \Delta g)}\right)$$
$$= \frac{g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} - f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x)(g(x) + \Delta g)}$$
$$\to \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2},$$

då $\Delta x \to 0$.

Exempel på deriverbarhet. (1) Derivatan av den identiska funktionen $f(x) = x$ är 1 i varje punkt, dvs. $Dx = 1$, ty

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

för varje h, och därmed är även gränsvärdet 1.
(2) Derivatan i punkten x av potensfunktionen x^n är $nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$. Formeln gäller för värdena $n = 0$ och $n = 1$; en konstant funktion och den identiska funktionen. Vi bevisar formeln för positiva värden på n med induktion. Vi antar alltså att följande gäller:

$$Dx^k = kx^{k-1}.$$

Enligt induktionsantagandet gäller då

$$\begin{aligned} D(x^{k+1}) &= D(x^k x) = D(x^k)x + D(x)x^k \\ &= kx^{k-1} \cdot x + 1 \cdot x^k = (k+1)x^k = (k+1)x^{(k+1)-1}. \end{aligned}$$

Alltså gäller påståendet även för värdet $n = k + 1$. Således gäller det även för alla $n \in \mathbb{N}$.
(3)

$$D(f^2) = D(f \cdot f) = f'(x)f(x) + f'(x)f(x) = 2f(x)f'(x),$$

varav det med fullständig induktion följer att det för varje $n \in \mathbb{N}$ gäller att

$$D(f^n) = D(f(x)^n) = nf(x)^{n-1}f'(x).$$

Sats 7.3. Deriveringsregeln för sammansatta funktioner eller kedjeregeln.
Antag att f är definierad i en omgivning till punkten x och att g är definierad i en omgivning till $f(x)$. Antag att funktionen f är deriverbar i punkten x och att funktionen g är deriverbar i punkten $f(x)$. Då är den sammansatta funktionen $g \circ f$ deriverbar i punkten x och

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Bevis. Låt $y = f(x)$. Enligt karakteriseringssatsen är

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\epsilon_1(h),$$

där $\epsilon_1(h) \to 0$, då $h \to 0$. Vi betecknar $k = f'(x)h + h\epsilon_1(h)$, varvid

$$f(x+h) = y + k,$$

och därmed är

$$(g \circ f)(x+h) = g(f(x+h)) = g(y+k) = g(y) + g'(y)k + k\epsilon_2(k)$$

där $\epsilon_2(k) \to 0$, då $k \to 0$.
Alltså är

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x+h) &= g(y) + g'(y)(f'(x)h + h\epsilon_1(h)) + (f'(x)h + h\epsilon_1(h))\epsilon_2(k) \\ &= g(y) + g'(y)f'(x)h + g'(y)h\epsilon_1(h) + (f'(x)h + h\epsilon_1(h))\epsilon_2(k) \\ &= (g \circ f)(x) + g'(y)f'(x)h + h\epsilon_3(h), \end{aligned}$$

där $\epsilon_3(h) = g'(y)\epsilon_1(h) + f'(x)\epsilon_2(k) + \epsilon_1(h)\epsilon_2(k)$. Då $h \to 0$, så är $\epsilon_1(h) \to 0$, och därmed gäller $k \to 0$, eftersom f är kontinuerlig i punkten x. Således är $\epsilon_2(k) \to 0$ och $\epsilon_3(h) \to 0$.

Anmärkningar. (1) För funktionen g i den föregående satsen används ibland benämningen <u>yttre funktion</u>. Funktionen f kallas ibland <u>inre funktion</u>.
(2) Formeln i det föregående exemplet, $D(f(x)^n) = nf(x)^{n-1}f'(x)$, kan också erhållas med kedjeregeln genom att välja $g(y) = y^n$ som yttre funktion:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = f(x)^n\,, \\ (g \circ f)'(x) &= g'(f(x))f'(x) = nf(x)^{n-1}f'(x)\,. \end{aligned}$$

(3) Om vi i kedjeregeln för sammansatta funktioner väljer $g = f^{-1}$ (ifall f^{-1} existerar) och antar att g är deriverbar i punkten $f(x) = y$, så ger kedjeregeln och

$$g \circ f(x) = f^{-1} \circ f(x) = x\,,$$

att

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x) &= g'(f(x))f'(x) \\ &= (f^{-1})'(y)f'(x) = 1\,, \end{aligned}$$

alltså är

$$(f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(x)}\,,$$

om $f'(x) \neq 0$.
Den inversa funktionens derivata i punkten $y = f(x)$ är alltså det inverterade talet till den ursprungliga funktionens derivata i punkten x. Följande sats visar att deriverbarheten för funktionen f^{-1} <u>inte</u> behöver antas, utan den följer automatiskt av deriverbarheten för funktionen f. Observera att vi tidigare bevisade att kontinuiteten för funktionen f^{-1} följer av kontinuiteten för funktionen f.

Sats 7.4. Deriveringsregeln för en invers funktion. *Antag att Δ är ett intervall och att $f : \Delta \to \mathbb{R}$ är en strängt monoton, kontinuerlig funktion. Låt $x \in \Delta$ vara en innerpunkt. Vi antar att det finns ett sådant $f'(x)$, att $f'(x) \neq 0$.*
Då har den inversa funktionen $g = f^{-1} : f\Delta \to \Delta$ derivatan

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

i punkten $y = f(x)$, med andra ord

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Bevis. Vi väljer $k \neq 0$ så att $g(y+k)$ är definierad.

Vi betecknar

$$h = g(y+k) - g(y)\,,$$

varvid

$$h = g(y+k) - x\,,$$

och därmed är

$$g(y+k) = x + h\,,$$

när $h \neq 0$. Alltså är

$$\begin{aligned} y + k = f(x+h) &\Longrightarrow \\ k = f(x+h) - y &\Longrightarrow \\ k = f(x+h) - f(x). & \end{aligned}$$

Då gäller

$$\frac{g(y+k)-g(y)}{k} = \frac{h}{f(x+h)-f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}\,.$$

Då $k \to 0$, får vi

$$h = g(y+k) - g(y) \to 0\,,$$

ty g är kontinuerlig [Myrberg 3.9.1, en av kontinuitetens stora satser].

Således existerar

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

Anmärkning. Tangentens riktningskoefficient växlar till ett inverterat tal, då axlarnas roller byts sinsemellan, $y = f(x)$ och $x = g(y)$. Rita bild!

Högre derivator. Om funktionen f har en derivata i varje punkt i intervallet Δ, så är denna f' igen en funktion av x: $x \mapsto f'(x)$. Denna funktion kallas derivatafunktionen till funktionen f. Om derivatafunktionen f' till funktionen f har en derivata i punkten x, så kallas denna den andra derivatan av funktionen f eller <u>derivatan av andra graden</u> i punkten x och betecknas

$$f''(x) = D^{(2)}f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x)\,.$$

Generellt så definieras funktionens <u>derivata av n:te graden</u> i punkten x, ifall den existerar, som derivatan av funktionens $(n-1)$:te derivata i punkten x, och för denna används beteckningen

$$f^{(n)}(x) = D^{(n)}f(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)\,.$$

8. DIFFERENTIALKALKYLENS GRUNDSATSER

Anmärkning. Dessa saker hör till de viktigaste i kursen!

Den reella funktionen f är deriverbar i det öppna intervallet (a, b), om den är deriverbar i varje punkt i intervallet (a, b). Den reella funktionen f är deriverbar i det slutna intervallet $[a, b]$, om den är deriverbar i det öppna intervallet (a, b), samt om $f'_+(a)$ och $f'_-(b)$ existerar.

Vi bevisar härnäst några av de viktigaste resultaten inom differentialkalkyl. Grundidén är att $f'(x_0)$ visar funktionen f:s ”riktning” i punkten x_0.

Lemma 8.1. (a) Låt $f'(x_0) > 0$. Då finns det ett $\sigma > 0$ så att

$$f(x) > f(x_0),\text{ då } x_0 < x < x_0 + \sigma$$

och

$$f(x) < f(x_0),\text{ då } x_0 - \sigma < x < x_0\,.$$

(b) Låt $f'(x_0) < 0$. Då finns det ett $\sigma > 0$ så att

$$f(x) < f(x_0),\text{ då } x_0 < x < x_0 + \sigma$$

och

$$f(x) > f(x_0),\text{ då } x_0 - \sigma < x < x_0\,.$$

Bevis. (a) Se boken [Myrberg, Sats 5.2.1].

(b)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0.$$

Då finns det ett $\sigma > 0$ så att

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0\,,$$

då $0 < |x - x_0| < \sigma$. Om

$$0 < x - x_0 < \sigma \quad \text{dvs.} \quad x_0 < x < \sigma + x_0\,,$$

så är

$$f(x) - f(x_0) < 0\,.$$

Om

$$-\sigma < x - x_0 < 0 \quad \text{dvs.} \quad x_0 - \sigma < x < x_0\,,$$

så är

$$f(x) - f(x_0) > 0\,.$$

Varning. I Lemma 8.1 behöver inte funktionen f vara växande i någon omgivning till punkten x_0, fastän det skulle gälla att $f'(x_0) > 0$. Till exempel har vi funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + \frac{x}{2},\text{ då } x \neq 0 \\ 0,\text{ då } x = 0 \end{cases},$$

som inte är växande i någon omgivning till punkten $x_0 = 0$, fastän det nu gäller att $f'(0) > 0$. Se även Räkneövningsuppgifterna 12.9 och 12.10.

Korollarium 8.2. Antag att Δ är ett intervall och att $f : \Delta \to \mathbb{R}$, samt att
(1) f antar sitt största eller minsta värde i punkten $x_0 \in \Delta$,
(2) x_0 inte är någon av intervallets ändpunkter,
(3) $f'(x_0)$ existerar.
Då är $f'(x_0) = 0$.

Bevis. Vi kan anta att f uppnår sitt maximum i punkten x_0. Om $f(x_0)$ vore ett minimum, så skulle vi undersöka funktionen $-f$.

(1) Om $f'(x_0) > 0$, så finns det enligt Lemma 8.1 ett sådant x att

$$x_0 < x < x_0 + \sigma \,,$$

och

$$f(x) > f(x_0) \,,$$

men detta är en motsägelse.

(2) Om $f'(x_0) < 0$, så finns det enligt Lemma 8.1 ett sådant x att

$$x_0 - \sigma < x < x_0 \,,$$

och

$$f(x) > f(x_0) \,,$$

men också detta är en motsägelse.

Anmärkning. Följande gäller INTE: $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f$ får sitt största eller minsta värde i punkten x_0.

Exempel. Låt $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \,, \quad x \in [-5, 5] \\ f'(x) &= 3x^2 \\ f'(0) &= 0 \,. \end{aligned}$$

Rolles sats. *Låt f vara kontinuerlig i det slutna intervallet $[a, b]$ och deriverbar i det öppna intervallet (a, b) samt låt $f(a) = f(b)$. Då existerar det åtminstone en punkt $\xi \in (a, b)$ så att $f'(\xi) = 0$.*

Märk: Eftersom f är deriverbar i intervallet (a, b), så är f kontinuerlig i intervallet (a, b). Som kontinuitetsantagande skulle det alltså räcka med att anta att f är kontinuerlig i intervallets ändpunkter.

Beviset för Rolles sats.

(1) Låt först

$$f(x) = f(a) = f(b) \text{ för alla } x \in [a, b] \,.$$

Då är

$$f'(x) = 0 \text{ för alla } x,$$

alltså vilken punkt som helst i intervallet (a, b) duger som tal ξ.

(2) Vi kan alltså anta att f får andra värden än $f(a)$. Vi antar att $f(x) > f(a) = f(b)$ för något $x \in [a, b]$. Enligt Weierstrass min-max -teorem finns det då ett $\xi \in [a, b]$ så att f antar sitt största värde i punkten ξ.

Således är

$$f(\xi) \geq f(x) > f(a) = f(b) \,,$$

varvid $a < \xi < b$ och vidare är $f'(\xi) = 0$.

Vi antar sedan att $f(x) < f(a)$ för något x. På motsvarande sätt som tidigare så existerar det ett ξ, där f antar sitt minsta värde, och där $f'(\xi) = 0$.

Differentialkalkylens medelvärdessats (DMVS).

Låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig i det slutna intervallet $[a, b]$ och deriverbar i det öppna intervallet (a, b). Då finns det åtminstone en punkt $\xi \in (a, b)$ så att

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \,.$$

Anmärkning. DMVS är differentialkalkylens mest användbara sats!

Anmärkning. Den geometriska tolkningen av Rolles sats garanterar (då vi gjort antagandena) att ifall det för funktionens ändpunkter gäller att $f(a) = f(b)$, så finns det åtminstone en punkt i intervallet, där tangenten till grafen är likriktad med x-axeln. DMVS garanterar på motsvarande sätt åtminstone en tangent, som har samma riktning som linjen som förenar intervallets ändpunkter. Rolles sats fås alltså som ett specialfall av DMVS.

Beviset för Differentialkalkylens medelvärdessats.

Antag att L är en funktion, vars graf är en rak linje, som förenar punkterna $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$. Nu är $L(a) = f(a)$ och $L(b) = f(b)$ samt

$$L'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

för alla x.

Vi kan uttrycka påståendet med hjälp av Rolles sats genom att undersöka differensen mellan $f(x)$ och sekanten som går genom punkterna $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$.

$$g(x) = f(x) - (f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)) \,,$$

där

$$L(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \,,$$

alltså är

$$g(x) = f(x) - L(x)$$

för alla $x \in [a, b]$. Då är g kontinuerlig i intervallet $[a, b]$ och deriverbar i intervallet (a, b). Eftersom $g(a) = 0 = g(b)$, så existerar det ett $\xi \in (a, b)$ så att $g'(\xi) = 0$. För detta ξ gäller att

$$f'(\xi) = L'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \,.$$

Exempel. Antag att f är deriverbar i det slutna intervallet $[0, 5]$, att $f(0) = 2$ samt att $|f'(x)| \leq 6$, då $x \in (0, 5)$. Mellan vilka gränser ligger då $f(5)$?

Lösning: För det första är f deriverbar i intervallet $[0, 5]$ (speciellt är f kontinuerlig i intervallet $[0, 5]$). Med stöd av DMVS finns det åtminstone en punkt $\xi \in (0, 5)$ för vilken det gäller att

$$f'(\xi) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} \,.$$

Med stöd av antagandena gäller då

$$-6 \leq \frac{f(5)-f(0)}{5} = \frac{f(5)-2}{5} \leq 6\,,$$

alltså är

$$-30+2 \leq f(5) \leq 30+2$$

och således har vi att

$$-28 \leq f(5) \leq 32\,.$$

Cauchys generaliserade medelvärdessats. *Antag att $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerliga i det slutna intervallet $[a,b]$ och deriverbara i det öppna intervallet (a,b). Då finns det ett sådant $\xi \in (a,b)$ att*

$$(f(b)-f(a))g'(\xi) = (g(b)-g(a))f'(\xi)\,.$$

Bevis. Vi definierar $h : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x).$$

Funktionen h är kontinuerlig i intervallet $[a,b]$. Låt $a < x < b$. Då existerar

$$h'(x) = (f(b)-f(a))g'(x) - (g(b)-g(a))f'(x)\,.$$

Vidare är $h(b) = h(a)$, ty

$$\begin{aligned} h(a) &= f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) \\ h(b) &= f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b)\,. \end{aligned}$$

Enligt Rolles sats finns det ett ξ, där $h'(\xi) = 0$, varur påståendet följer.

Anmärkningar. (1) Rolles sats fås analytiskt ur DMVS genom att välja $f(a) = f(b)$.
(2) DMVS fås ur Cauchys generaliserade medelvärdessats genom att välja ett sådant g att $g(x) = x$ för alla x, varvid $g'(x) = 1$.
(3) Viktig anmärkning! I praktiken används differentialkalkylens medelvärdessats oftast även på följande sätt:

Antag att f är kontinuerlig i intervallet $[a,b]$ och deriverbar i intervallet (a,b). Låt $x \in (a,b]$. Då finns det ett $\xi_x \in (a,x)$ så att

$$f(x) = f(a) + f'(\xi_x)(x-a)\,,$$

där $a < \xi_x < x \leq b$. Observera att ξ_x är beroende av punkten x.

Integralkalkylens fundamentala grundsats. *Denna sats betydelsefullhet syns på vårens kurs Differential- och integralkalkyl I.2!*

Antag att $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och att $f'(x) = 0$ för alla $x \in (a,b)$. Då är f en konstant funktion.

Bevis. Låt $a < x \leq b$. Vi tillämpar DMVS på intervallet $[a,x]$, varvid det existerar ett $\xi \in (a,x)$ så att

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi) = 0$$

och därmed är

$$f(x) = f(a)$$

för alla $x \in [a,b]$.

Korollarium för Integralkalkylens fundamentala grundsats 8.3. Detta korollarium är viktigt i vårens kurs Differential- och integralkalkyl I.2.

För funktionerna f och g som är deriverbara i intervallet $[a,b]$ gäller att

$$f'(x) = g'(x)$$

för alla $x \in [a,b]$, om och endast om

$$f(x) = g(x) + C$$

för alla $x \in [a,b]$, där $C \in \mathbb{R}$ är en konstant.

Bevis. Vi tillämpar Integralkalkylens fundamentala grundsats på funktionen $f-g$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.

Medelvärdesolikheten 8.4. *Låt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Vi antar att*
(1) f är kontinuerlig,
(2) f är deriverbar i det öppna intervallet (a,b),
(3) $f'(x) \leq M$ för alla $x \in (a,b)$.
Då är

$$f(b) - f(a) \leq M(b-a)\,.$$

Om det dessutom gäller att $|f'(x)| \leq M$, är

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)\,.$$

Bevis. Resultatet följer direkt av DMVS.

Felberäkning. Vi mäter vinkeln φ, och får 25.1^o som dess närmevärde. Vi betecknar detta med symbolen α. Vi vet mätningsnoggrannheten:

$$|\varphi - \alpha| \leq 0.1^o =: h\,.$$

Fråga: Hur stort kan felet för $\tan\varphi$ vara?
Lösning: Vi löser uppgiften med hjälp av Medelvärdessatsen (det finns också andra sätt). Vi söker en approximation av uttrycket $|\Delta|$, där $\Delta = \tan\varphi - \tan\alpha$. Av DMVS följer att

$$|\Delta| = |D\tan\mu||\varphi - \alpha|\,,$$

för något $\mu \in (\alpha - h, \alpha + h)$. Nu gäller att

$$|D(\tan\mu)| = \frac{1}{\cos^2\mu} \leq \frac{1}{\cos^2 25.2^o}\,,$$

ty $t \mapsto \cos t$ är avtagande i intervallet $[0,\pi]$ och

$$\begin{aligned} \cos\mu &\geq \cos(\alpha + h) \\ &= \cos 25.2^o\,. \end{aligned}$$

och därmed är

$$\Delta \leq \frac{1}{\cos^2 25.2^o}\frac{0.1}{180}\pi = 0.002132\ldots \approx 0.002.$$ Felet är således ungefär 0.2 procent.

Beteckning. Om $\Delta \subset \mathbb{R}$ är ett intervall, så betecknar vi

$$\mathrm{int}\Delta = \{x | x \text{ är en innerpunkt för } \Delta\}.$$

Punkten x är en inre punkt för intervallet Δ, om det existerar ett $\sigma_x > 0$ så att $U(x, \sigma_x) \subset \Delta$.

Följande resultat är användbart:

Sats 8.5. (Monotonitetssatsen). *Antag att $\Delta \subset \mathbb{R}$ är ett intervall och låt $f : \Delta \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig i intervallet Δ och deriverbar i alla punkter $x \in \mathrm{int}\,\Delta$. Då är f växande, omm*

$$f'(x) \geq 0$$

för alla $x \in \mathrm{int}\,\Delta$.

Bevis. $\Longrightarrow$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

för alla x.

$\Longleftarrow$: Låt $y, z \in \Delta\,, y < z$.

Enligt Differentialkalkylens fundamentala grundsats finns det ett $\mu \in (y, z)$ så att

$$f(z) - f(y) = f'(\mu)(z - y) \geq 0$$
$$\Longrightarrow f(z) \geq f(y)\,.$$

Funktionen f är alltså växande.

Sats 8.6. (Satsen för sträng monotonitet). *Antag att $\Delta \subset \mathbb{R}$ är ett intervall och låt $f : \Delta \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig i intervallet Δ och deriverbar för alla $x \in \mathrm{int}\,\Delta$.*

Då är f strängt växande omm

$$f'(x) \geq 0$$

för alla $x \in \mathrm{int}\,\Delta$ och om det inte existerar ett intervall $\Delta_1 \subset \Delta$, där $f'(x) = 0$ för alla $x \in \Delta_1$.

Bevis. $\Longrightarrow$: Av monotonitetssatsen följer att $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in \Delta$. Om det existerar ett Δ_1, där $f'(x) = 0$, så är $f\Big|_{\Delta_1}$ konstant enligt integralkalkylens fundamentala grundsats, dvs. f är inte strängt växande.

$\Longleftarrow$: Av monotonitetssatsen följer att f är växande. Om f inte är strängt växande, så finns det tal $y < z$ så att $f(y) = f(z)$. Då är $f\Big|_{[y,z]}$ konstant (eftersom f är växande), varvid $f'(x) = 0$ för alla $x \in]y, z[= \Delta_1$, men detta är en motsägelse. Därmed är f strängt växande.

Extremvärden. Antag att f är definierad i en omgivning till punkten x_0. Då är x_0 en lokal maximipunkt till funktionen f, om det finns en omgivning $U(x_0, r)$ till punkten x_0 så att

$$f(x_0) = \max\{f(x) | x \in U(x_0, r)\}$$

dvs. att $f(x) \leq f(x_0)$ för alla $x \in U(x_0, r)$. Då är $f(x_0)$ ett lokalt maximivärde för funktionen f.

På motsvarande sätt definierar vi en lokal minimipunkt och lokalt minimivärde. De gemensamma benämningarna är lokal extrempunkt och lokalt extremvärde. Punkten x_0 är en väsentlig lokal maximipunkt, om det existerar ett $r > 0$ så att $f(x) < f(x_0)$ för alla $x \in U(x_0, r) \setminus \{x_0\}$.

Vi repeterar Korollarium 8.2 och formulerar om det:

Sats 8.7. *Om punkten x_0 är en extrempunkt för funktionen f och om $f'(x_0)$ existerar, är $f'(x_0) = 0$.*

Enbart villkoret $f'(x_0) = 0$ garanterar dock inte att x_0 är en extrempunkt. Funktionen $f(x) = x^3$ ger med värdet $x_0 = 0$ ett exempel på ett fall där $f'(x_0) = 0$, men där x_0 ändå inte är en extrempunkt. Härnäst presenterar vi det sk. f'-testet för lokala extrempunkter.

Sats 8.8. (f′-test för extrempunkter). *Vi gör följande antaganden om funktionen f:*

(1) f är kontinuerlig i en omgivning $U(x_0, r)$ till punkten x_0 och

(2) f är deriverbar för alla $x \in U(x_0, r) \setminus x_0$.

Om det dessutom gäller att (3)

$$\begin{cases} f'(x) > 0, \text{ då } x_0 - r < x < x_0 \\ f'(x) < 0, \text{ då } x_0 < x < x_0 + r\,, \end{cases}$$

så är x_0 en väsentlig lokal maximipunkt för funktionen f.

Om villkoret (3) ersätts med villkoret (3')

$$\begin{cases} f'(x) < 0, \text{ då } x_0 - r < x < x_0 \\ f'(x) > 0, \text{ då } x_0 < x < x_0 + r\,, \end{cases}$$

så är x_0 en väsentlig lokal minimipunkt för funktionen f.

Bevis. Se början av beviset i boken [Myrberg, Sats 5.6.1]. Av den föregående monotonitetssatsen [Myrberg, Sats 5.5.3] får vi att f är strängt avtagande i intervallet $(x_0 - r, x_0)$ och strängt växande i intervallet $(x_0, x_0 + r)$. Påståendet följer av detta.

Sats 8.9. *Vi gör följande antaganden om funktionen f:*

(1) f är kontinuerlig i en omgivning $U(x_0, r)$ till punkten x_0 och

(2) f är deriverbar för alla $x \in U(x_0, r) \setminus \{x_0\}$.

Vidare antar vi att

(3) $f'(x)$ har samma förtecken överallt och att $f'(x) \neq 0$ för alla $x \in U(x_0, r) \setminus \{x_0\}$.

Då är x_0 inte en maximipunkt för funktionen f.

Bevis. Funktionen f är strängt monoton i intervallet $U(x_0, r)$.

Exempel. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = x^3$ och $x_0 = 0$.

Sats 8.10. (f″-test för extremvärden). *Antag att f är definierad och deriverbar i en omgivning till punkten x_0, att $f'(x_0) = 0$ samt att $f''(x_0) > 0$ existerar. Då är x_0 en lokal minimipunkt för funktionen f. Om $f''(x_0) < 0$, så är x_0 en lokal* *maximipunkt för funktionen f. Om $f''(x_0) = 0$, så kan vi inte säga någonting om funktionens extremvärden i punkten x_0.*

Bevis. Antag att $f''(x_0) > 0$. Vi tillämpar Lemma 8.1 på funktionen f'. Det existerar ett sådant $\sigma > 0$ att

$$\begin{cases} f'(x) > f'(x_0) = 0, \text{ då } x_0 < x < x_0 + \sigma \\ f'(x) < f'(x_0) = 0, \text{ då } x_0 - \sigma < x < x_0 . \end{cases}$$

Av f'-testsatsen [Myrberg 5.6.1] följer att x_0 är en lokal minimipunkt. Fallet $f''(x_0) < 0$ behandlas på motsvarande sätt. Om $f''(x) = 0$, så kan x_0 vara eller inte vara en extrempunkt.

Exempel. Låt
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4$.
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -x^4$.
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$.

Funktionen f har en lokal minimipunkt i noll (i själva verket en global minimipunkt), funktionen h har en lokal maximipunkt i noll (i själva verket en global maximipunkt), och funktionen g har inte en extrempunkt i noll. Rita bild!

Påminnelse. Strax före Weierstrass min-max -sats definierade vi begreppen största värdet för en funktion och minsta värdet för en funktion. Låt $A \subset \mathbb{R}$ vara en mängd och $f : A \to \mathbb{R}$ en funktion. Ifall

$$\max f(A) = \max f A = \max\{f(x) | x \in A\} = \max_{x \in A} f(x) ,$$

existerar, är det det största värdet för funktionen, dvs. ett globalt maximivärde. Således är M det största värdet för funktionen f omm

(1) $f(x) \le M$ för alla $x \in A$ och
(2) $f(x) = M$ för något $x \in A$.

På motsvarande sätt definierar vi det minsta värdet för funktionen f, dvs. det globala minimärdet:

$$\min f(A) = \min f A = \min\{f(x) | x \in A\} = \min_{x \in A} f(x) .$$

Korollarium 8.11. En funktion som är deriverbar i det slutna intervallet $[a, b]$ uppnår sitt största (och likaså sitt minsta) värde i intervallets ändpunkter eller i derivatans nollställen.

Korollarium 8.12. En funktion som är kontinuerlig i det slutna intervallet $[a, b]$ uppnår sitt största (och likaså sitt minsta) värde i intervallets ändpunkter, i derivatans nollställen eller i icke-deriverbarhetsställen (med andra ord i en punkt, där derivatan inte existerar).

Anmärkningar. (1) Antag att $\Delta \subset \mathbb{R}$ är ett intervall. Låt $f : \Delta \to \mathbb{R}$ vara en funktion. Vi skulle ha kunnat definiera, att funktionen f har en lokal maximipunkt i x_0 om $f(x_0)$ är det största värdet för funktionen f i något intervall $U(x_0, \sigma) \cap \Delta$ som innehåller punkten x_0. Då skulle en lokal extrempunkt även kunna vara en ändpunkt till intervallet Δ. L. Myrberg och J. Väisälä har valt att definiera endast i innerpunkter x_0 och vi gjorde därför detsamma här.

(2) I extremvärdesuppgifter bör man undersöka (vid behov)
derivatans nollställen,
intervallets ändpunkter,
icke-deriverbarhetsställen och
diskontinuitetsställen.

Exempel.
(1) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara sådan att $f(x) = 3x^4 + 4x^3$. Bestäm det största och minsta värdet för funktionen f.

Lösning: $f(x) = 3x^4 + 4x^3$, f är kontinuerlig och deriverbar. Eventuella lokala extrempunkter:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1) ,$$
$$f'(x) = 0$$

omm

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad x = -1 .$$

Den lokala extrempunktens art klargörs genom att rita teckenschemat som redan är bekant från skolkursen. Rita ett teckenschema!

Enligt teckenschemat är -1 en lokal minimipunkt, men 0 är inte en lokal extrempunkt. Se f'-testet och Sats 8.9.) Således är -1 en lokal minimipunkt. Övriga lokala extrempunkter finns inte.

Globala extrempunkter:

$f'(x) < 0$ för alla $x < -1 \Longrightarrow f\Big|_{(-\infty,-1)}$ är strängt avtagande.

$f'(x) > 0$ får alla $x > -1$ och $f'(x) = 0$, när $x = 0$ eller $x = -1 \Longrightarrow f\Big|_{(-1,\infty)}$ är strängt växande.

Därmed är -1 en global minimipunkt. Ett globalt maximum existerar inte, ty $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Svar: $f(-1) = 3 - 4 = -1$ är det minsta värdet och det största värdet existerar inte.

(2) Låt $f : [-2, 6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Bestäm det största och minsta värdet för funktionen f i intervallet $[-2, 6]$.

Lösning: Funktionen f är kontinuerlig och deriverbar i det slutna intervallet $[-2, 6]$. Nu räcker det att undersöka nollställena för derivatan f' av funktionen f, samt intervallets ändpunkter.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3(-9)}}{3 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 108}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{6} = \frac{6 \pm 12}{6} ,$$

alltså är

$$x = 3 \quad \text{eller} \quad x = -1,$$

således är -1 och 3 eventuella extrempunkter. De enda eventuella extrempunkterna är därmed $-2, -1, 3$ och 6.

$$\begin{aligned}
f(-1) &= -1 - 3 + 9 + 5 = 10\,,\\
f(3) &= 27 - 27 - 27 + 5 = -22;\text{ minsta värdet,}\\
f(-2) &= -8 - 12 + 18 + 5 = 3\,,\\
f(6) &= 216 - 108 - 54 + 5 = 59;\text{ största värdet.}
\end{aligned}$$

Svar: Det största värdet är $f(6) = 59$ och det minsta värdet är $f(3) = -22$.

Observera att vi i denna uppgift inte alls behövde undersöka extrempunkternas art.

En kurvas krökning. Grafen för en funktion f som är deriverbar i intervallet Δ kallas <u>konvex</u>, om grafen inte i någon punkt i intervallet ligger nedanför någon tangent till grafen. Vi utesluter alltså inte räta kurvor.

Grafen för en funktion f som är deriverbar i intervallet Δ kallas <u>konkav</u>, om grafen inte i någon punkt i intervallet ligger ovanför någon tangent till grafen.

Bevara det geometriska synsättet!

Sats 8.13. *Grafen för en funktion f som är deriverbar två gånger i intervallet Δ är konvex <u>omm</u> $f''(x) \geq 0$ i hela intervallet.*

Bevis. Rita bild! Tangentens ekvation i punkten $(x_0, f(x_0))$ är

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Skillnaden i y-läge mellan grafen och tangenten i punkten x är således

$$d(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))\,.$$

Med stöd av Differentialkalkylens medelvärdessats finns det ett sådant $\xi_x \in (x_0, x)$ att

$$\begin{aligned}
d(x) &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\\
&= f'(\xi_x)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\\
&= (f'(\xi_x) - f'(x_0))(x - x_0)\,.
\end{aligned}$$

Vi påstår att $d(x) \geq 0$, <u>omm</u> $f''(x) \geq 0$.

Om $f''(x) \geq 0$ i intervallet Δ, så är f' växande, och därmed är $d(x) \geq 0$.

Om $d(x) \geq 0$ i hela intervallet Δ, så är $f''(x) \geq 0$ i hela intervallet Δ. Ifall det i någon punkt x_0 hade gällt att $f''(x_0) \leq 0$, så skulle Lemma 8.1 (tillämpat på funktionen f') ge att talen $x - x_0$ och $f'(\xi_x) - f'(x_0)$ har olika tecken, då x är tillräckligt nära punkten x_0 och således skulle $d(x) < 0$.

Sats 8.14. *Grafen för en funktion f som är deriverbar två gånger i intervallet Δ är konkav <u>omm</u> $f''(x) \leq 0$ i hela intervallet.*

Beviset motsvarar beviset för Sats 8.13.

Inflexionspunkt. Antag att funktionen f är deriverbar två gånger i en omgivning till punkten x_0. Punkten x_0 är en <u>inflexionspunkt</u> till funktionen f, om $f''(x_0) = 0$ och f'' byter tecken då vi passerar punkten x_0.

Exempel. (1) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 3x\\
f'(x) &= 3x^2 - 3\\
f''(x) &= 6x\,.
\end{aligned}$$

Då är $f''(x) = 6x > 0$, <u>omm</u> $x > 0$.

Funktionen f är konkav i intervallet $(-\infty, 0]$ och konvex i intervallet $[0, \infty)$. Origo är en inflexionspunkt till funktionen f.

(2) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Vi undersökte tidigare extremvärdena i intervallet $[-2, 6]$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9\\
f''(x) &= 6x - 6\,.
\end{aligned}$$

Då är $f''(x) = 0$, <u>omm</u> $x = 1$. Eftersom $f''(x) < 0$, då $x < 1$, och $f''(x) > 0$, då $x > 1$, har funktionen f en inflexionspunkt i punkten 1.

Funktionen f är konkav i intervallet $(-\infty, 1]$ och konvex i intervallet $[1, \infty)$.

l'Hospitals regel. Vi undersöker gränsvärdet $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, då $f(x_0) = 0$ och $g(x_0) = 0$.

<u>Den enkla formen av l'Hospitals regel</u>: Låt f och g vara definierade i en omgivning till punkten x_0 och deriverbara i punkten x_0. Om $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$ och $g'(x_0) \neq 0$, är

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,.$$

Bevis.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}\\
&\longrightarrow \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,,
\end{aligned}$$

då $x \to x_0$.

Exempel. Bestäm

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{\sin x}}{\sin(e^x - 1)}\,.$$

Vi antar att det är känt att

$$\begin{aligned}
De^x &= e^x\\
D\sin x &= \cos x\,.
\end{aligned}$$

Låt nu

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{2x} - e^{\sin x}\\
g(x) &= \sin(e^x - 1)\,.
\end{aligned}$$

Funktionerna f och g är deriverbara, $f(0) = g(0) = 0$ samt $g'(0) \neq 0$,

$$g'(x) = e^x(\cos(e^x - 1))$$
$$g'(0) = e^0 \cos 0 = 1 \neq 0\,.$$

Vi deriverar täljaren och nämnaren och substituerar $x = 0$.

$$\frac{2e^{2x} - (\cos x)e^{\sin x}}{(\cos(e^x - 1)e^x)} = \frac{2-1}{1} = 1\,.$$

Alltså är

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{\sin x}}{\sin(e^x - 1)} = 1\,.$$

<u>Den mera krävande formen av l'Hospitals regel:</u> Antag att s är någon av beteckningarna $a, a+, a-, \infty$ eller $-\infty$, där $a \in \mathbb{R}$. Antag vidare att funktionerna f och g är deriverbara i intervallet Δ och antag att

(1) $$\lim_{x\to s} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

existerar. Ifall

(2) $$\lim_{x\to s} f(x) = \lim_{x\to s} g(x) = 0$$

eller

(3) $$\lim_{x\to s} |g(x)| = \infty\,,$$

så är

$$\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

Anmärkningar. (1) Antagandet innehåller implicit följande antaganden: f och g är definierade och deriverbara nära s och $g'(x) \neq 0$ nära s.

(2) Fallet $\lim_{x\to a}$ följer av fallen $\lim_{x\to a+}$ och $\lim_{x\to a-}$, ty $\lim_{x\to a} h(x)$ existerar <u>omm</u> gränsvärdena $\lim_{x\to a+} h(x)$ och $\lim_{x\to a-} h(x)$ existerar och är lika stora.

(3) Guillaume de l'Hospital (1661–1704) var en fransk matematiker.

Vi formulerar fallet $\lim_{x\to a+}$ noggrannt i satserna 8.15 och 8.16 där $L \in \mathbb{R}$.

Sats 8.15. *Antag att funktionerna f och g är deriverbara i intervallet (a, b), att $g(x) \neq 0$ för alla $x \in (a, b)$ samt att $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a, b)$.*
Antag att

(1) $$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}\,.$$

Ifall

(2) $$\lim_{x\to a+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a+} g(x)\,,$$

är

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

Bevis. Eftersom $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a, b)$, så är $g'(x) > 0$ eller $g'(x) < 0$ i hela intervallet (a, b).

Låt $a < x < y < b$. Cauchys generaliserade medelvärdessats ger att det existerar ett sådant $\xi \in (x, y)$ att

$$(f(y) - f(x))g'(\xi) = (g(y) - g(x))f'(\xi)\,,$$

där $g(y) - g(x) \neq 0$, ty g är strängt monoton.

Därmed är

(1*) $$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Ifall $\epsilon > 0$ är givet, får vi med stöd av fall (1) att det existerar ett $\sigma > 0$ så att

(2*) $$\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\right| < \epsilon\,,$$

då $a < t < a + \sigma$.

Antag nu att $a < y < a + \sigma$. Vi väljer $x \in (a, y)$. Då finns det ett $\xi \in (x, y)$ så att (1*) gäller. Eftersom $a < x < \xi < y < a + \sigma$, så gäller (2*) då vi substituerar $t = \xi$. Kombinerat med det föregående får vi alltså att

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} - L\right| < \epsilon\,,$$

då $a < x < y < a + \sigma$.

Med en fixerad punkt y låter vi punkten x närma sig punkten a från positiv riktning, varvid $f(x) \to 0$ och $g(x) \to 0$ enligt antagandet (2). Därmed är

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)} - L\right| \le \epsilon\,,$$

då $a < y < a + \sigma$, och således är

$$\lim_{y\to a+} \frac{f(y)}{g(y)} = L\,.$$

Påståendet blev alltså bevisat.

Sats 8.16. *Antag att funktionerna f och g är deriverbara i intervallet (a, b), att $g(x) \neq 0$ för alla $x \in (a, b)$ samt att $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a, b)$.*
Antag att

(1) $$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}\,.$$

Ifall

(2)
$$\lim_{x\to a+} g(x) = \infty\,,$$

är

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

Bevis. Nu är g strängt avtagande. Detta följer av att $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a,b)$ och att $\lim_{x\to a+} g(x) = \infty$. Antag att $\epsilon > 0$ är givet. På basen av antagandena (1) och (2) finns det ett $c_1 \in (a,b)$ så att

(2*')
$$\Big|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\Big| < \frac{\epsilon}{2}\,,$$

då $a < t < c_1$ och $g(t) > 0$, då $a < t < c_1$.

Vi fixerar punkten $y \in (a, c_1)$. Låt $x \in (a,y)$. Enligt Cauchys generaliserade medelvärdessats finns det ett $\xi \in (x,y)$ så att

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Jämför detta med beviset för föregående sats.

Därmed är

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)-f(y)+f(y)}{g(x)} \\ &= \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\cdot\frac{g(x)-g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}\,.\end{aligned}$$

Eftersom g är strängt avtagande och $x < y$, är

$$1 - \frac{g(y)}{g(x)} > 0\,.$$

Med stöd av (2*') har vi därmed att

$$\frac{f(x)}{g(x)} < \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}\,.$$

Enligt antagandet (2) finns det ett $c_2 \in (a,y)$ så att

$$\left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} < L + \epsilon\,,$$

så länge $a < x < c_2$.

På motsvarande sätt är $\frac{f(x)}{g(x)} > L - \epsilon$ i intervallet $a < x < c_3$.

Vi väljer nu $c_4 = \min\{c_2, c_3\}$, varvid

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - L\Big| < \epsilon\,,$$

då $a < x < c_4$.

Anmärkning. Även fallen, där $L = \infty$ eller $L = -\infty$ kan bevisas på motsvarande sätt.

Exempel. Bestäm $\lim_{x\to 0+} x \ln x$.

Vi antar att det är känt att $D \ln x = \frac{1}{x}$ för alla $x > 0$.

Lösning:

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \longrightarrow \frac{-\infty}{\infty}\,,$$

då $x \to 0+$. Eftersom satsens (2) antaganden gäller i intervallet $(0,\infty)$, kan vi tillämpa l'Hospitals regel:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} x\ln x &= \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+} x = 0\,.\end{aligned}$$

Anmärkning. Då vi undersöker gränsvärdet för uttrycket $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ kan vi tillämpa l'Hospitals regel på nytt, med andra ord kan vi undersöka uttrycket $\frac{f''(x)}{g''(x)}$. Satsens antaganden måste dock kontrolleras skilt för varje steg!

Exempel. Bestäm

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \cos x}.$$

Vi antar att det är känt att

$$\begin{aligned}D \sin x &= \cos x \\ D \cos x &= -\sin x\end{aligned}$$

Lösning:

$$\frac{x - \sin x}{x - x\cos x} \to \frac{0}{0}\,,$$

då $x \to 0$. Vi kontrollerar att antagandena gäller och deriverar:

$$\frac{1-\cos x}{1-\cos x + x\sin x} \to \frac{0}{0}\,,$$

då $x \to 0$. Vi kontrollerar att antagandena gäller och deriverar:

$$\frac{\sin x}{\sin x + \sin x + x\cos x} \to \frac{0}{0}\,,$$

då $x \to 0$. Vi kontrollerar att antagandena gäller och deriverar:

$$\frac{\cos x}{2\cos x + \cos x - x\sin x} \to \frac{1}{3},$$

då $x \to 0$.

Exempel. Visa att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = 0\,.$$

Lösning:

$$\frac{x^2}{e^{3x}} \to \frac{\infty}{\infty}\,,$$

då $x \to \infty$. Med stöd av l'Hospitals regel existerar det sökta gränsvärdet ifall

(1) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3e^{3x}}$$

existerar. Igen har vi att $\frac{2x}{3e^{3x}} \to \frac{\infty}{\infty}$, då $x \to \infty$. Enligt l'Hospitals regel existerar (1) ifall

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{9e^{3x}}$$

existerar. Eftersom det vidare gäller att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{9e^{3x}} = 0\,,$$

så är

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = 0\,.$$

9. ELEMENTÄRA FUNKTIONER

Polynom. Funktionen P_n,

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0\,,$$

där $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ är konstanter och $a_n \neq 0$, kallas ett polynom, vars gradtal är n. Vi betecknar: $\deg P = n$. Ett polynom, vars alla koefficienter är noll, kallas ett nollpolynom, och det betecknas med symbolen $\mathcal{O}$. Vidare definierar vi $\deg \mathcal{O} = -\infty$.

Anmärkningar. (1) Polynomet P_n är kontinuerligt i hela $\mathbb{R}$.

(2) Polynomet $P_n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ är deriverbart i hela $\mathbb{R}$ och dess derivata är

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \\ &= \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}\,. \end{aligned}$$

(3) Om gradtalet för polynomet P_n är jämnt, så har polynomet P_n åtmintstone ett reellt nollställe. Detta följer direkt av Bolzanos sats. Se även Räkneövningsuppgift 6.8 och 10.10.

(4) Låt

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

där $n \geq 1$ och $a_n \neq 0$.

Bestäm $\lim_{x\to\infty} P(x)$.

Eftersom

$$P(x) = x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n \right),$$

så gäller

$$P(x) \longrightarrow \infty\,,$$

då $x \to \infty$, om $a_n > 0$, och

$$P(x) \longrightarrow -\infty\,,$$

då $x \to \infty$, om $a_n < 0$.

(5) Om P och Q är polynom, så är också $P+Q$, $P-Q$ och PQ polynom. Dessutom är

$$\begin{aligned} &\deg(P+Q) \leq \max\{\deg P, \deg Q\} \\ &\deg(PQ) = \deg P + \deg Q\,, \end{aligned}$$

om $P \neq \mathcal{O}$ och $Q \neq \mathcal{O}$.

Vi presenterar härnäst några andra egenskaper för polynom.

Sats 9.1. *Om x_1 är ett nollställe för P_n, så är $P_n(x)$ delbart med termen $(x - x_1)$, med andra ord*

$$P_n(x) = (x - x_1)Q_{n-1}(x)\,,$$

där $Q_{n-1}(x)$ är ett polynom av graden $(n-1)$.

Bevis. Vi bevisar med induktion att

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}),$$

se Handledning 1.3. Eftersom $P_n(x_1) = 0$, är

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x) - P_n(x_1) \\ &= a_n(x^n - x_1^n) + \cdots + a_1(x^1 - x_1^1) + a_0 - a_0 \\ &= (x - x_1)(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0), \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_n x_1 + a_{n-1} \\ &\vdots \\ b_0 &= a_n x_1^{n-1} + \cdots + a_1 . \end{aligned}$$

Korollarium 9.2. Om polynomet P_n har n olika nollställen $x_1, \ldots, x_n$, så är

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Korollarium 9.3. Ett polynom P_n av graden n kan ha högst n olika nollställen.

p-faldigt nollställe. Om

$$P_n(x) = (x - x_1)^p Q_{n-p}(x),$$

där x_1 inte är ett nollställe till polynomet Q_{n-p}, så säger vi att x_1 är ett p-faldigt nollställe till polynomet P_n (alltså den p-faldiga roten till ekvationen $P_n(x) = 0$).

Sats 9.4. *Om x_1 är ett p-faldigt nollställe till polynomet P_n, så är x_1 ett $(p-1)$-faldigt nollställe till polynomet P_n'.*

Bevis. Eftersom

$$P_n(x) = (x - x_1)^p Q_{n-p}(x),$$

där $Q_{n-p}(x_1) \neq 0$, så är

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= p(x - x_1)^{p-1} Q_{n-p}(x) + Q_{n-p}'(x)(x - x_1)^p \\ &= (x - x_1)^{p-1}(pQ_{n-p}(x) + (x - x_p)Q_{n-p}'(x)) \\ &= (x - x_1)^{p-1} H(x), \end{aligned}$$

där

$$H(x) = pQ_{n-p}(x) + (x - x_1)Q_{n-p}'(x)$$

är ett polynom för vilket det gäller att $H(x_1) \neq 0$.

Binomialsatsen 9.5. Med induktion bevisar den så kallade Newtons binomialformel:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n}b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}b^k , \end{aligned}$$

där talet "n över k", $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, kallas binomialkoefficient. Trivialt gäller $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Kom även ihåg Pascals triangel då du räknar binomialkoefficienterna!

Anmärkningar. (1) För polynom gäller den så kallade <u>delningsekvationen:</u>
Om P_n och $Q_m, n \geq m$, ($Q_m \neq \mathcal{O}$), är polynom, så existerar det entydiga polynom H och K så att

$$P_n = HQ_m + K,$$

där gradtalet för polynomet K är lägre än gradtalet för polynomet Q_m.
Se Myrbergs bok, Sats 3.4.1.

(2) Då $n = 1, 2, 3, 4$, får vi polynomet P_n:s nollställen, alltså lösningarna till ekvationen

$$a_n x^n + \cdots + a_0 = 0,$$

<u>algebraiskt</u>, dvs. lösningarna fås genom att utföra en <u>ändlig</u> mängd additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner samt rotoperationer Då $n \geq 5$, hittas inte lösningarna längre algebraiskt. Detta bevisade den unge norske Niels Henrik Abel år 1823.

Rationella funktioner. Funktionen R,

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

där P och Q är polynom och $Q \neq \mathcal{O}$, kallas en rationell funktion.

Den naturliga startmängden för den rationella funktionen R är $\mathbb{R}\setminus\{x : Q(x) = 0\}$, där $\{x : Q(x) = 0\}$ är en ändlig mängd [Myrberg, Sats 3.4.4].

Exempel. Den naturliga startmängden för funktionen

$$R(x) = \frac{x^3 + 5x + 1}{x^4 - 1},$$

är $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Anmärkning. Antag att

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m, \\ Q(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n, \end{aligned}$$

där $a_m \neq 0$ och $b_n \neq 0$. Låt

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,.$$

Då är

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} 0, \text{ om } m < n. \\ \pm\infty, \text{ om } m > n; \text{ förtecknet bestäms av termen } \frac{a_m}{b_n} \\ \frac{a_m}{b_n}, \text{ om } m = n. \end{cases}$$

Bevis. a) Om $m < n$ så gäller

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1}{x^{n-m}}\left(\frac{\frac{a_0}{x^m} + \cdots + a_m}{\frac{b_0}{x^n} + \cdots + b_n}\right) \\ &\longrightarrow 0 \cdot \frac{a_m}{b_n} = 0\,, \end{aligned}$$

då $x \to \infty$.

b) Om $m > n$ så gäller

$$R(x) = x^{m-n}\left(\frac{\frac{a_0}{x^m} + \cdots + a_m}{\frac{b_0}{x^n} + \cdots + b_n}\right)$$

och $R(x) \to \infty$, då $x \to \infty$, ifall $\frac{a_m}{b_n} > 0$.
Om $\frac{a_m}{b_n} < 0$, så gäller $R(x) \to -\infty$, då $x \to \infty$.

c) Om $m = n$ så gäller

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\frac{a_0}{x^m} + \cdots + a_m}{\frac{b_0}{x^n} + \cdots + b_n} \\ &\longrightarrow \frac{a_m}{b_n}\,, \end{aligned}$$

då $x \to \infty$.

Sats 9.6. *Låt $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, x_0 \in \mathbb{R}$ och $Q(x_0) \neq 0 \neq P(x_0)$. Då är*

$$\lim_{x\to x_0} |R(x)| = \infty\,.$$

Bevis. Eftersom

$$Q(x) = (x - x_0)^m Q_1(x)\,,$$

där $m > 0$, Q_1 är ett polynom och $Q_1(x_0) \neq 0$, så är

$$\begin{aligned} |R(x)| &= \frac{1}{|x - x_0|^m}\frac{|P(x)|}{|Q_1(x)|} \\ &\longrightarrow \infty \cdot \frac{|P(x_0)|}{|Q_1(x_0)|} = \infty\,, \end{aligned}$$

då $x \to x_0$.

Algebraiska funktioner. Funktionen f kallas algebraisk, om den uppfyller ekvationen

$$P(x, f(x)) = 0\,,$$

där P är ett polynom med två variabler. Funktioner som inte är algebraiska kallas transcendenta funktioner. Sådana är till exempel exponentialfunktioner och trigonometriska funktioner. Med ett polynom med två variabler menas att $P(x, y)$ är av formen

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^i y^j\,,$$

där $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Exempel. Antag att $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Då är funktionen f algebraisk, ty

$$f(x) = y = \sqrt[3]{x}$$

och

$$P(x, y) = x - y^3 = 0\,.$$

Exempel. Polynom, rationella funktioner och rotfunktioner är algebraiska funktioner.

Elementära funktioner. Genom att utföra additioner, subtraktioner, multiplikationer, divisioner samt sammansättning av funktioner på algebraiska funktioner och olika transcendenta funktioner (till exempel exponentialfunktioner, trigonometriska funktioner och deras inversa funktioner), får vi funktioner, som kallas elementära funktioner.

Exempel. Följande funktioner är elementära funktioner:

$$\begin{aligned} &\overline{arc}\sin x\,, \\ &\ln x\,, \\ &\cos(x^2 + e^x)\,, \\ &x^x\,. \end{aligned}$$

Vi undersöker nu egenskaper för några transcendenta elementära funktioner.

Exponentialfunktionen $\mathbf{e^x}$.

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,7182\ldots$$

Vårt mål är att definiera e^x för alla $x \in \mathbb{R}$.

Repetition.

(1)
$$\begin{aligned} &x^0 = 1 \\ &x^m x^n = x^{m+n}, x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \\ &(x^m)^n = x^{mn}, x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \\ &x^{-n} = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, x \neq 0\,. \end{aligned}$$

(2) Efter satsen om den inversa funktionens kontinuitet definierade vi funktionen $x^{\frac{1}{n}}$.

Talet $x^{\frac{m}{n}}$ definieras genom att sammansätta funktionerna

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{och} \quad g(y) = y^m ,$$

med andra ord

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m .$$

Vi upptäcker att

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} ,$$

där $m \in \mathbb{N}$ och $n \in \mathbb{N}, x \neq 0$.

Funktionen $x \mapsto x^{\frac{m}{n}}$ är definierad i intervallet $[0, \infty)$, och om n är jämnt så är den definierad i hela $\mathbb{R}$.

Räknereglerna för heltalsexponenter ger att

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$
$$x^{\frac{m}{n}} x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} .$$

Observation. e^x är definierad, då $x \in \mathbb{Q}$,

$$e^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{e})^m = \sqrt[n]{e^m}$$
$$e^{x+y} = e^x e^y$$
$$(e^x)^y = e^{xy}$$
$$e^0 = 1 .$$

Då gäller
(1) om $x = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N}$ och $n \in \mathbb{N}$, dvs. $x > 0$, så är $e^x > 1$, ty $e > 1$, och därmed är $e^{\frac{1}{n}} > 1$ och $e^{\frac{m}{n}} > 1$. Av detta följer att funktionen
(2) e^x är strängt växande i mängden $\mathbb{Q}$, eftersom $e^{x+h} = e^x e^h > e^x$, då $h > 0$.

Sats 9.7. *$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, är kontinuerlig.*

Bevis. (1) Vi visar att funktionen f är kontinuerlig i origo. Låt $\epsilon > 0$. Vi väljer ett $n \in \mathbb{N}$ så att

$$\frac{n}{n-1} < 1 + \epsilon \quad \text{och} \quad \frac{n-1}{n} > 1 - \epsilon .$$

Detta kan vi göra då vi väljer $n > \frac{1+\epsilon}{\epsilon}$.

Antag att $x \in \mathbb{Q}$ är sådant att $|x| < \frac{1}{n}$. Vi skall visa att

$$|e^x - 1| < \epsilon .$$

Eftersom $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$, så är

$$e^{-\frac{1}{n}} < e^x < e^{\frac{1}{n}} ,$$

ty e^x är växande.

Nu är

$$e^{\frac{1}{n}} < \frac{n}{n-1} < 1 + \epsilon$$

och

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} > \frac{n-1}{n} > 1 - \epsilon ,$$

eftersom $(1 - \frac{1}{n})^n$ är växande och $(1 - \frac{1}{n})^n < \frac{1}{e}$. (Detta resultat bevisas senare.)

Alltså är

$$|e^x - 1| < \epsilon ,$$

och f är därmed kontinuerlig i origo.

(2) Antag att $x_0 \in \mathbb{Q}$. Vi visar att f är kontinuerlig i punkten x_0.

Låt $\epsilon > 0$ och $h \in \mathbb{Q}$. Då är

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| = |e^{x_0+h} - e^{x_0}|$$
$$= |e^{x_0} e^h - e^{x_0}| = e^{x_0} |e^h - 1| .$$

Eftersom funktionen f är kontinuerlig i origo, så existerar det ett $\delta > 0$ så att

$$|e^h - 1| < \epsilon e^{-x_0} ,$$

då $|h| < \delta$.

Då är

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \epsilon .$$

Definition. Om $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, så är

$$e^x = \sup\{e^r | r \in \mathbb{Q}, r < x\} .$$

Denna mängd är uppifrån begränsad; om vi väljer ett $s \in \mathbb{Q}, s > x$, så är $e^r < e^s$ för alla $r < s$. Alltså är

$$e^x = \sup e^r \leq e^s .$$

Av trycktekniska skäl betecknar vi även

$$e^x = \exp(x) ,$$

varvid $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Härnäst undersöker vi exponentialfunktionens egenskaper.

Lemma 9.8. Låt $x \in \mathbb{R}$, $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n < x$ och $x_n \to x$. Då är

$$\exp(x_n) \longrightarrow \exp(x) .$$

Bevis. Om $x \in \mathbb{Q}$, så följer påståendet av att $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, är kontinuerlig. Låt $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ och antag att $\epsilon > 0$ är givet. Då finns det ett $r \in \mathbb{Q}$ så att $r < x$ och $e^x > e^x - \epsilon$, eftersom $e^x = \sup\{e^p | p \in \mathbb{Q}, p < x\}$.

Vi väljer n_0 så att $x_n > r$, då $n > n_0$. För dessa n gäller att

$$e^x - \epsilon < e^r < e^{x_n} < e^x ,$$

eftersom e^x är strängt växande i mängden $\mathbb{Q}$ och $x_n \in \mathbb{Q}$.

Sats 9.9. *$e^{x+y} = e^x e^y$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och $y \in \mathbb{R}$.*

Bevis. Vi väljer två växande rationella talföljder (x_n) och (y_n) så att

$$\begin{aligned} x_n &\to x \\ y_n &\to y\,, \end{aligned}$$

varvid

$$x_n + y_n \to x + y\,.$$

Eftersom

$$e^{x_n + y_n} = e^{x_n} e^{y_n}\,,$$

så ger Lemma 9.8, då $n \to \infty$, att

$$e^{x+y} = e^x e^y\,.$$

Lemma 9.10. $e^x > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Bevis. Fallet där $x \in \mathbb{Q}$ bevisades redan tidigare.
Om $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ så väljer vi $r \in \mathbb{Q}, r < x$, varvid vi får

$$e^x \geq e^r > 0\,,$$

ty $x = \{e^p | p < x, p \in \mathbb{Q}\}$.

Lemma 9.11. $x \mapsto \exp(x)$ är strängt växande i $\mathbb{R}$.

Bevis. Om $h > 0$, så är $e^h > 1$, eftersom vi kan välja ett $r \in \mathbb{Q}$ så att $0 < r < h$, och därmed är

$$e^h \geq e^r > 1\,.$$

Låt nu $x < y$, varvid $y = x + h, h > 0$. Alltså är

$$e^y = e^{x+h} = e^x e^h > e^x\,,$$

eftersom $e^x > 0$ och $e^h > 1$.

Repetition. Vi har tidigare bevisat följande sats.

Sats 9.12. *Låt $x \in \mathbb{R}$. Då är följden (x_n), där*

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

växande för de n, för vilka $n > |x|$. Dessutom är följden (x_n) uppifrån begränsad.

Anmärkning. Då $x = 1$, får vi Nepers tal $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Anmärkning 9.13. Den växande talföljden $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ har gränsvärdet $\frac{1}{e}$.

Bevis.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \frac{\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}\,, \end{aligned}$$

då $n \to \infty$, då vi tillämpar följande hjälpresultat.

Hjälpresultat 9.14.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1\,,$$

eftersom

$$\begin{aligned} 1 \geq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n &\geq 1 - \frac{1}{n^2}(n) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \to 1\,, \end{aligned}$$

då $n \to \infty$.
Ovan har vi använt Bernoullis olikhet: $(1 + x)^n \geq 1 + nx, n \in \mathbb{N}, x > -1$.

Lemma 9.15.

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$$

och

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1\,.$$

Bevis. Den växande talföljden $(1 - \frac{1}{n})$ har gränsvärdet $\frac{1}{e}$, då $n \to \infty$. Alltså är

$$(1 - \frac{1}{n}) < \frac{1}{e}$$

och

$$\frac{n-1}{n} < \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}\,.$$

Således är

$$e^{\frac{1}{n}} < \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}\,.$$

Å andra sidan gäller dessutom

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e\,,$$

dvs.
$$1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}<e^{\frac{1}{n}}.$$
Därmed är
$$1+\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n-1},$$
så enligt instängningssatsen är
$$\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1.$$
Eftersom $e^{\frac{1}{n}}e^{-\frac{1}{n}}=1$ så är
$$\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}}=1.$$

Sats 9.16. *Funktionen $x\mapsto e^x$ är kontinuerlig i $\mathbb{R}$.*

Bevis. Låt $x_0\in\mathbb{R}$. Vi visar att funktionen f är kontinuerlig i punkten x_0.

(a) Om $x_0=0$. Låt $\epsilon>0$. Av de föregående lemmorna följer att
$$e^{\frac{1}{n}}\to 1$$
och
$$e^{-\frac{1}{n}}\to 1,$$
då $n\to\infty$.

Alltså finns det ett n, för vilket
$$|e^{\frac{1}{n}}-1|<\epsilon$$
och
$$|e^{-\frac{1}{n}}-1|<\epsilon.$$
Speciellt ser vi att
$$e^{\frac{1}{n}}-1<\epsilon \quad \text{och} \quad e^{-\frac{1}{n}}-1>-\epsilon.$$
Då $|x|<\frac{1}{n}$, så är
$$e^{-\frac{1}{n}}<e^x<e^{\frac{1}{n}},$$
och således är
$$-\epsilon<e^x-1<\epsilon.$$
Alltså ser vi att
$$|e^x-1|<\epsilon.$$
Därmed är funktionen f kontinuerlig i origo.

(b) Om x_0 är en godtycklig punkt i $\mathbb{R}$ så är
$$e^{x_0+h}=e^{x_0}e^h\to e^{x_0}\cdot 1,$$
då $h\to 0$, enligt (a)-fallet. Alltså är funktionen e^x kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$.

Lemma 9.17.
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$
Bevis. Vi har tidigare bevisat att
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e,\text{ då } n\to\infty$$
och
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{1}{e},\text{ då } n\to\infty,$$
och därmed är
$$1+\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n-1},$$
och
$$\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}-1<\frac{1}{n-1}. \tag{1}$$
Låt $x\in(0,1)$. Vi väljer ett sådant n_x att
$$\frac{1}{n_x}<x\le\frac{1}{n_x-1}.$$
Eftersom e^x är strängt växande så ger (1) att
$$\frac{1}{n_x}<e^{\frac{1}{n_x}}-1<e^x-1\le e^{\frac{1}{n_x-1}}-1<\frac{1}{n_x-2}.$$
Således är
$$\frac{1}{xn_x}<\frac{e^x-1}{x}<\frac{1}{x(n_x-2)}.$$
Eftersom
$$\frac{1}{n_x}<x\le\frac{1}{n_x-1}$$
har vi att
$$n_x-1\le\frac{1}{x}<n_x.$$
Vidare gäller
$$\frac{n_x-1}{n_x}<\frac{e^x-1}{x}<\frac{n_x}{n_x-2}.$$
Då $x\to 0+$, ser vi att $n_x\to\infty$, så de övre och undre gränserna närmar sig talet 1, dvs.
$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=1.$$
Om $x<0$, så är
$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^{-|x|}-1}{-|x|}=\frac{1}{e^{|x|}}\left(\frac{e^{|x|}-1}{|x|}\right)$$
$$\to\frac{1}{1}\cdot 1=1,$$
då $x\to 0$.

Därmed är
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Sats 9.18. *Funktionen $x \mapsto e^x$ är positiv, strängt växande och deriverbar i hela $\mathbb{R}$ och $De^x = e^x$. Dessutom är*

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\,,$$

och e^x växer fortare än alla potenser x^p, $p \in \mathbb{N}$, dvs.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty\,.$$

Bevis. (1) I de föregående lemmorna har vi bevisat att exponentialfunktionen är positiv, strängt växande och kontinuerlig.

(2) Eftersom $e > 1$, så är

$$\lim_{n\to\infty} e^n = \infty\,,$$

så eftersom e^x är strängt växande gäller även att

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty\,.$$

Vidare gäller att

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{t\to\infty} e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = \frac{1}{\infty} = 0\,.$$

(3) Vi visar att $De^x = e^x$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Eftersom

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}\,,$$

så följer påståendet av det föregående lemmat, enligt vilket

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1\,.$$

(4) Vi visar ännu att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty\,,$$

$p \in \mathbb{N}$. Detta är Räkneövningsuppgift 11.3. (Enkel tillämpning av l'Hospitals regel.)

Anmärkningar. (1) Av det föregående följer att

$$D^{(n)} e^x = e^x$$

för alla $n \in \mathbb{N}$. Geometriskt betyder detta att tangentens riktningskoefficient i varje punkt i grafen $y = e^x$ är detsamma som y-koordinaten i punkten!

(2) För alla x gäller att $e^x \geq 1 + x$. Vi bevisar detta.

Vi definierar $f(x) = e^x$, varvid $f^{(2)}(x) = e^x > 0$. Funktionen f är alltså konvex. Tangenten för funktionen $f(x) = e^x$ i punkten $(0, 1)$ är

$$y = 1 + 1 \cdot x = 1 + x\,.$$

Alltså är $e^x \geq 1 + x$ för alla x.

(3) Av den föregående olikheten $e^x \geq 1+x$ följer även direkt att $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

Logaritmfunktionen. Vi har bevisat att $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ är strängt växande, kontinuerlig och att den antar alla värden i intervallet $(0, \infty)$.

Det existerar alltså en invers funktion

$$\exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}\,,$$

som vi betecknar log eller ln.

Eftersom det för den sammansatta funktionen gäller

$$(\exp \circ \ln)(x) = \exp(x) \circ \ln(x) = x\,,$$

med andra ord

$$\exp(\ln(x)) = x\,,$$

så är

$$\begin{aligned} xy &= \exp(\ln(x)) \exp(\ln(y)) = e^{\ln x} e^{\ln y} \\ &= \exp(\ln(x) + \ln(y)) = e^{\ln x + \ln y}\,, \end{aligned}$$

och därmed är

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)\,.$$

Vidare, eftersom $\exp(0) = 1$, så är

$$0 = \ln 1 = \ln x \frac{1}{x} = \ln x + \ln \frac{1}{x}\,,$$

och således är

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x\,.$$

Sats 9.19. *Logaritmfunktionen $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$, är strängt växande och deriverbar och den antar alla reella värden. Dessutom är*

$$D \ln x = \frac{1}{x}\,.$$

Vidare växer $\ln x$ långsammare än alla potenser $x^{\frac{1}{p}}$, $p \in \mathbb{N}$, med andra ord

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{p}}}{\ln x} = \infty = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\ln x)^p}\,.$$

Bevis. Att logaritmfunktionen är strängt växande och deriverbar följer av de motsvarande egenskaperna hos den inversa funktionen $\exp(x)$. Om vi betecknar $y = \ln x$, så får vi

$$D \ln x = \frac{1}{D(e^y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}\,.$$

Dessutom är

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\ln x)^p} = \lim_{y\to\infty} \frac{\exp(y)}{y^p} = \infty\,,$$

och därmed är

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\ln x)^p} = \infty\,.$$

Repetition 9.20. Låt $p \in \mathbb{N}$. Då är

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty$,

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\ln x)^p} = \infty$,

(3) $\lim_{x\to\infty} x(\ln x)^p = 0$.

Bevis. Räkneövningsuppgifter 11.3, 11.4 och 11.5.

Den generaliserade exponentialfunktionen $\mathbf{a^x}$. Antag att $a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$. Den generaliserade exponentialfunktionen a^x kan presenteras som den sammansatta funktionen $e^{kx}, \exp(kx)$, där $k = \ln a$.

Sats 9.21.

$$a^x = e^{x \ln a} = \exp(x \ln a).$$

Bevis. Se Myrberg, kapitel 6.4.

Anmärkning. Funktionen $x \mapsto a^x$ är strängt växande, då $a > 1$ och strängt avtagande, då $0 < a < 1$.

Dessutom är

$$Da^x = a^x \ln a$$

och

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty, \text{ när } a > 1 \\ 0, \text{ när } a < 1\,. \end{cases}$$

Den generaliserade logaritmfunktionen $\mathbf{{}^a\log x}$.

Låt $a > 0$ och $a \neq 1$. Eftersom $x \mapsto a^x$ är strängt monoton och kontinuerlig, så har den en invers funktion, nämligen logaritmfunktionen med basen a:

$${}^a\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}\,.$$

Eftersom

$$a^x \circ {}^a\log x = x\,,$$

med andra ord

$$a^{{}^a\log x} = x\,,$$

så är

$$\ln(a^{{}^a\log x}) = ({}^a\log x) \ln a = \ln x\,.$$

Med andra ord är

$${}^a\log x = \frac{\ln x}{\ln a}\,.$$

Dessutom är

$$D\,{}^a\log x = D\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}\,.$$

Den generaliserade potensfunktionen. $x \mapsto x^\mu$, där $\mu \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Vi definierar

$$x^\mu = \exp(\mu \ln x) = e^{\mu \ln x}\,.$$

Då blir x^μ definierad som en funktion, som är kontinuerlig i $(0, \infty)$, strängt växande om $\mu > 0$, strängt avtagande om $\mu < 0$, och $+1$ (alltså konstant) då $\mu = 0$.

De vanliga räknereglerna gäller; till exempel är

$$x^{\mu+\nu} = x^\mu \cdot x^\nu\,.$$

Genom att derivera får vi att

$$\begin{aligned} Dx^\mu &= D\exp(\mu \ln x) = \exp(\mu \ln x)\frac{\mu}{x} \\ &= \frac{\mu}{x} x^\mu = \mu x^{\mu-1}\,, \end{aligned}$$

och således är

$$Dx^\mu = \mu x^{\mu-1}\,.$$

Viktig anmärkning. Funktioner av typen $f(x)^{g(x)}$ definieras enligt följande:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \ln f(x))\,.$$

Exempel. Låt $f(x) = x^x$. Bestäm det största och minsta värdet för funktionen f i intervallet $(0, 1]$, ifall det ifrågavarade värdet existerar.

Lösning: Nu är $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$. Funktionen f är tydligt en sammansatt funktion av två kontinuerliga funktioner och därmed kontinuerlig. Dessutom är

$$f'(x) = \exp(x \ln x)(Dx \ln x) = \exp(x \ln x)(\ln x + x \cdot \frac{1}{x})\,.$$

Alltså är $f'(x) = 0$ ifall

$$\ln x + 1 = 0$$

alltså då

$$\ln x = -1$$

dvs. då

$$x = e^{-1} \in (0, 1]\,.$$

$$f(e^{-1}) = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} \approx 0.692 < 1\,.$$

Å andra sidan är $f'(x) = \exp(x \ln x)(1 + \ln x) > 0$, då $x > \frac{1}{e}$, ty $\exp(x \ln x) > 0$ och $(1 + \ln x) > 0$, då $x > \frac{1}{e}$. Dessutom är $f'(x) < 0$, då $0 < x < \frac{1}{e}$.

Funktionen f är alltså strängt avtagande i intervallet $(0, \frac{1}{e}]$ och strängt växande i intervallet $[\frac{1}{e}, 1]$.

Därmed är $\frac{1}{e}$ ett lokalt och globalt minimiställe. Å andra sidan är

$$f(1) = 1$$

och

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \exp(x \ln x) = 1\,.$$

Det största värdet för funktionen x^x är således $f(1) = 1$ och det minsta värdet är $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$.

Lemma 9.22. Nepers tal e definierade vi som gränsvärdet $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Generaliseringen av detta är

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

Bevis. Låt x vara stort, $x \geq 1$. Vi väljer $n_x \in \mathbb{N}$ så att $n_x \leq x < n_x + 1$. Då är

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} &\leq \left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\\ &\leq \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1},\end{aligned}$$

där det för den vänstra sidan gäller att

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} = \frac{\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x+1}}{1+\frac{1}{n_x+1}} \to \frac{e}{1}\,,$$

då $n_x \to \infty$. För den högra sidan gäller

$$\left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1} = \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x}\left(1+\frac{1}{n_x}\right) \to e\cdot 1 = e\,,$$

då $n_x \to \infty$.

Alltså, när $x \to \infty$, så är

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

Sats 9.23. *Vi fixerar ett $a \in \mathbb{R}$ och låter $x \in (0,\infty)$. Då är*

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x = e^a\,.$$

Bevis. (1) Då $a = 0$, så stämmer påståendet trivialt.

(2) Vi antar att $a \neq 0$ och betecknar $\frac{a}{x} = \frac{1}{t}$, varvid

$$\begin{aligned}&(1+\frac{a}{x})^x = (1+\frac{1}{t})^{ta}\\ &= \left((1+\frac{1}{t})^t\right)^a\\ &\to e^a\,,\end{aligned}$$

då $t \to \pm\infty$, dvs. då $x \to \pm\infty$, enligt kontinuiteten för potensfunktioner.

Hyperboliska funktioner. Inom integralkalkylen kommer vi ofta att använda sk. hyperboliska funktioner. Dessa är sinus-, cosinus-, tangens- och cotangens hyperbolicus och definieras enligt följande:

$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,,$$
$\cosh : \mathbb{R} \to [1,\infty)$,
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,,$$
$\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$,
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,,$$
$\coth : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus[-1,1]$,
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,.$$

Rita graferna!

För de hyperboliska funktionerna gäller formler, som liknar formlerna för de trigonometriska funktionerna, till exempel:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Detta resultat följer direkt av att

$$\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$$

och

$$\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})\,.$$

Genom att derivera får vi att:

$D\sinh x = D(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$,

$D\cosh x = D(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$,

$D\tanh x = D\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$, och

$D\coth x = 1 - \coth^2 x\,.$

Areafunktionerna, dvs. de hyperboliska funktionernas inversa funktioner.

Areafunktionerna definieras som inversa funktioner till de hyperboliska funktionerna.

Eftersom $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en strängt växande kontinuerlig bijektion, så har den en invers funktion

$$\operatorname{ar}\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$$

med samma egenskaper.

Eftersom $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$ är strängt växande och kontinuerlig i $\mathbb{R}$, med värdemängden $(-1,1)$, så är tanh en bijektion, och därmed har den en invers funktion

$$\operatorname{ar}\tanh : (-1,1) \to \mathbb{R}\,.$$

Begränsningen till funktionen $\cosh y$ i intervallet $(0,\infty)$ har en invers funktion $\operatorname{ar}\cosh x$, som är definierad i intervallet $[1,\infty)$.

Eftersom $\cosh y = \cosh(-y)$, så har begränsningen till funktionen $\cosh y$ i intervallet $(-\infty,0)$ en invers funktion $-\operatorname{ar}\cosh x$.

Eftersom $\coth y$ är strängt avtagande i mängden $(0,\infty)$ med värdemängden $(1,\infty)$ och strängt avtagande i mängden $(-\infty,0)$ med värdemängden $(-\infty,-1)$, så är dess inversa funktion $\operatorname{ar}\coth x$ definierad för alla värden $|x| > 1$.

Areafunktionerna kan även skrivas med hjälp av logaritmfunktioner, ty om vi betecknar

$$y = \operatorname{ar}\sinh x\,,$$

så är

$$\begin{aligned}
&x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \implies \\
&2x = e^y - e^{-y}\Big| : e^{-y} \implies \\
&(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \implies \\
&e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}\,.
\end{aligned}$$

Eftersom $e^y > 0$, så duger inte lösningen med minustecken framför rotuttrycket, och därmed är

$$\begin{aligned}
e^y &= x + \sqrt{x^2+1} \implies \\
y &= \operatorname{ar}\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})\,.
\end{aligned}$$

På motsvarande sätt får vi att

$$\begin{aligned}
&x = \cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \implies \\
&(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0 \implies \\
&e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y = \pm\operatorname{ar}\cosh x &= \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) \\
&= \pm\ln(x + \sqrt{x^2-1})\,,
\end{aligned}$$

eftersom

$$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}\,.$$

Genom att beteckna $y = \tanh x$ får vi att

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}\,,$$

och således är

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}\,,$$

alltså är

$$y = \operatorname{ar}\tanh x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,,$$

då $|x| < 1$.

På motsvarande sätt får vi att

$$\operatorname{ar}\coth x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\,,$$

då $|x| > 1$.

Vi sammanfattar resultaten i följande sats:

Sats 9.24. *För areafunktionerna gäller följande framställningar med hjälp av logaritmer:*

$\operatorname{ar}\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ *för alla* $x \in \mathbb{R}$,

$\operatorname{ar}\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, *då* $x \geq 1$,

$\operatorname{ar}\tanh x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, *då* $|x| < 1$,

$\operatorname{ar}\coth x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, *då* $|x| > 1$.

Areafunktionernas derivator är:

$D\operatorname{ar}\sinh x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, *för alla* $x \in \mathbb{R}$,

$D\operatorname{ar}\cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, *då* $x > 1$,

$D\operatorname{ar}\tanh x = \frac{1}{1-x^2}$, *då* $|x| < 1$,

$D\operatorname{ar}\coth x = \frac{1}{1-x^2}$, *då* $|x| > 1$.

Trigonometriska funktioner. I skolkursen definieras sinus och cosinus med hjälp av en bild. Deras exakta härledning med serieteori görs först på vårens kurs Differential- och integralkalkyl I.2. Då är till exempel

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Det finns även andra definitionsmöjligheter, men ingen av dem passar riktigt i det här skedet av kursen.

Vi antar därför att följande basegenskaper är kända:

(1) sin och cos är funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(2) $\sin 0 = 0$ och $\cos 0 = 1$,

(3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

(4) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,,$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\,.$

(Se till exempel K. Väisälä: Trigonometria.)

Anmärkning. Av punkt (3) följer att

$$|\sin x| \leq 1 \quad \text{och} \quad |\cos x| \leq 1$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.

Sats 9.25. *Funktionerna* sin *och* cos *är kontinuerliga i* $\mathbb{R}$.

Bevis. 1^o Eftersom det enligt punkterna (4) och (3) gäller att

$$\cos x = \cos(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2},$$

så räcker det att visa att funktionen sin är kontinuerlig.

2^o a) Vi visar först att funktionen sin är kontinuerlig i origo:
Av punkt (5) följer att det existerar ett $\sigma > 0$ så att

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < 1,$$

då $0 < |x| < \sigma$.
För dessa x gäller att

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| + 1 < 1 + 1 = 2,$$

varvid $|\sin x| \leq 2|x|$. Därmed är $|\sin x| \leq 2|x|$ för alla x, då $|x| < \sigma$. Således är

$$\lim_{x\to 0}(\sin x) = 0 \quad \text{och} \quad \sin 0 = 0.$$

Funktionen sin är alltså kontinuerlig i origo och enligt punkt 1^o så är även funktionen cos kontinuerlig i origo.

2^o b) Vi visar nu att sin är kontinuerlig i en godtycklig punkt i $\mathbb{R}$. Låt $x_0 \in \mathbb{R}$ och $h \in \mathbb{R}$. Enligt punkterna (4), 2^o a) och (2) är då

$$\begin{aligned} &\sin(x_0 + h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h \\ &\longrightarrow \sin x_0 \cos 0 + \cos x_0 \sin 0 = \sin x_0, \end{aligned}$$

då $h \to 0$.
Funktionen sin är alltså kontinuerlig i punkten x_0. Både sin och cos är alltså kontinuerliga i hela $\mathbb{R}$.

Sats 9.26.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Bevis. I del 1^o av kontinuitetsbeviset visade vi att

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}.$$

Således är

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} f(\frac{x}{2})^2, \end{aligned}$$

då vi definierar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{ när } x \neq 0 \\ 1, \text{ när } x = 0. \end{cases}$$

Eftersom f är kontinuerlig, så är även den sammansatta funktionen $x \mapsto \frac{1}{2} f(\frac{x}{2})^2$ kontinuerlig och därmed är

$$\frac{1}{2} f(\frac{x}{2})^2 \to \frac{1}{2} f(0)^2 = \frac{1}{2}.$$

Sats 9.27.

$$\begin{aligned} D \sin x &= \cos x \\ D \cos x &= -\sin x. \end{aligned}$$

Bevis. 1^o Nu är D $\sin x =$

$$\begin{aligned} &\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \\ &\to \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x. \end{aligned}$$

Alltså är $D \sin x = \cos x$.
2^o Vidare är D $\cos x =$

$$\begin{aligned} &\frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \\ &\to \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x. \end{aligned}$$

Alltså är $D \cos x = -\sin x$.

Anmärkning. Tänk geometriskt på saken!

Viktiga anmärkningar. (1) Gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

existerar inte. Vi bevisar detta.

Då $x \to 0$, har vi att $\frac{1}{x} \to \pm\infty$, och $\sin\frac{1}{x}$ antar alla värden från -1 till 1 om och om igen. Således är

$$\Big|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}\Big| > 1$$

för vissa $x, y \in U(0,\delta) \setminus \{0\}$, hur litet δ vi än väljer. Funktionen $\sin\frac{1}{x}$ kallas topologens sinuskurva. Rita bild!

Märk: Låt $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Eftersom gränsvärdet $\lim_{x\to 0} f(x)$ inte existerar, så kan vi inte göra funktionen f kontinuerlig i origo, hur den än skulle definieras i origo.

(2)

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0\,,$$

eftersom

$$\Big|0 - x\sin\frac{1}{x}\Big| = |x|\Big|\sin\frac{1}{x}\Big| \le |x| < \epsilon\,,$$

då $0 < |x-0| < \epsilon$. (Talet ϵ duger alltså till tal δ).

Märk: Antag att

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x}, \quad x \ne 0\,.$$

Eftersom $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ existerar, så kan vi göra funktionen f kontinuerlig i origo genom att definiera $f(0) = 0$.

(3) Definiera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} + \frac{x}{2}, \text{ då } x \ne 0 \\ 0, \text{ då } x = 0\,. \end{cases}$$

Funktionen f är deriverbar i origo och $f'(0) > 0$, men f är inte växande i någon omgivning till origo. Jämför med varningen efter Lemma 8.1. Se även Räkneövningsuppgift 12.10.

Periodicitet. Talet $\omega \in \mathbb{R}$ är <u>period</u> för funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ om

$$f(x+\omega) = f(x)$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.

Då är även varje $n\omega$, där $n \in \mathbb{Z}$, period för funktionen f.

Sats 9.28. *Perioderna för funktionera sinus och cosinus är exakt talen $n2\pi, n \in \mathbb{Z}$.*

Bevis. Se Myrberg, Sats 6.6.2.

Anmärkningar. (1) Sinuskurvan får vi genom att förflytta cosinuskurvan mot höger med $\frac{\pi}{2}$:

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin x\cos\frac{\pi}{2} + \cos x\sin\frac{\pi}{2} = \cos x\,.$$

(2)

$$\sin(-x) = -\sin x.$$
$$\cos(-x) = \cos x\,.$$

Därmed är sin en jämn och cos en udda funktion.

Sats 9.29. *För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $|\sin x| \le |x|$.*

Bevis. Enligt Differentialkalkylens medelvärdessats så finns det ett sådant $t \in (0,x)$ att

$$\sin x = \sin x - \sin 0 = D\sin(t)\cdot(x-0) = (\cos t)\cdot x\,,$$

alltså är

$$|\sin x| \le |\cos t||x| \le |x|\,.$$

Sats 9.30. *För alla $x > 0$ gäller $\sin x < x$.*

Bevis. Vi definierar $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ genom

$$f(x) = x - \sin x\,.$$

Vi bevisar att funktionen f är strängt växande. Då gäller för alla $x > 0$ att

$$x - \sin x > f(0) = 0\,.$$

Funktionen f är deriverbar,

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

och $f'(x) \ge 0$ för alla x. Således är f växande.

Om det skulle vara ett intervall Δ, där

$$1 - \cos x = 0$$

(alltså f skulle inte vara strängt växande), så skulle

$$D(1-\cos x) = \sin x = D0 = 0$$

för alla $x \in \Delta$, och

$$D\sin x = \cos x = D0 = 0$$

för alla $x \in \Delta$. Således är $1 = 0$, vilket är en motsägelse. Alltså är $\sin x < x$ för alla $x > 0$.

Definition. Funktionen tan definieras enligt följande.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

Tangensfunktionens naturliga startmängd är

$$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\} =: A\,,$$

där tan är kontinuerlig.

Dessutom är

$$D\tan x = D(\frac{\sin x}{\cos x}) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

för alla $x \in A$.

Ytterligare är

$$D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0\,,$$

varvid $\tan x$ är strängt växande i alla intervall $\Delta \subset A$. Speciellt är den växande i det så kallade standardintervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Definition. Funktionen cot definieras enligt följande.

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}\,,$$

och dess naturliga startmängd är

$$\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\} =: B\,.$$

Funktionen $\cot x$ är deriverbar och således även kontinuerlig i mängden B. Dessutom är

$$D \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

Anmärkning. Approximering av talet π: Eftersom

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}\,,$$

så är

$$\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Därmed är

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

ty $\sin x > 0$ i intervallet $[0, \pi]$.

Eftersom det dessutom gäller att

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x\,,$$

så är

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} = 1 - \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

och således är

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Vi tillämpar Differentialkalkylens medelvärdessats på funktionen cos i intervallet $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Då existerar det ett $t \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ så att

$$\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{4} = (-\sin t)(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})\,.$$

Alltså är

$$0 - \frac{1}{\sqrt{2}} = (-\sin t)\frac{\pi}{4}$$

och

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{2}\sin t} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin t}\,,$$

där $\sin t \neq 0$.

Eftersom sin är strängt växande i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$, så är

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4} < \sin t < \sin \frac{\pi}{2} = 1\,.$$

Därmed är

$$2\sqrt{2} < \pi = \frac{2\sqrt{2}}{\sin t} < 2 \cdot 2 = 4\,.$$

På våren härleder vi en noggrannare metod för att beräkna närmevärdet för π. Då bekantar vi oss med sk. potensserier, som är viktiga matematiska verktyg.

Följande sak är viktig!

Arcusfunktionerna, dvs. de trigonometriska funktionernas inversa funktioner. Eftersom de trigonometriska funktionerna inte är strängt monotona, så har de inte inversa funktioner. Genom att begränsa funktionerna till lämpliga intervall, kan vi dock definiera inversa funktioner.

(1) $\overline{\text{arc}} \sin x$. Eftersom sinus är strängt växande och kontinuerlig i intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, med intervallet $[-1, 1]$ som värdemängd, så har restriktionen av sinus till det ifrågavarande intervallet en invers funktion, $\overline{\text{arc}} \sin x$, (läses: arcus sinus huvudgren), som alltså är definierad i intervallet $[-1, 1]$ och har värdemängden $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Med beteckningen $\arcsin x$ (utan överstreck!) menas varje tal (vinkel) y, för vilket $\sin y = x$. Med andra ord

$$y = \arcsin x\,.$$

Eftersom det finns oändligt många tal som uppfyller likheten $\sin y = x$, så antar $\arcsin x$ oändligt många värden,

$$\arcsin x = \begin{cases} \overline{\text{arc}} \sin x + n2\pi \\ \pi - \overline{\text{arc}} \sin x + n2\pi\,, \end{cases}$$

således är $\arcsin x$ inte en funktion! (Märk dock, att $\overline{\text{arc}} \sin x$ igen ÄR en funktion.)

(2) $\overline{\text{arc}} \cos x$. Eftersom sinus är strängt avtagande och kontinuerlig i intervallet $[0, \pi]$ med intervallet $[-1, 1]$ som värdemängd, så har restriktionen av cosinus till det ifrågavarande intervallet en invers funktion $\overline{\text{arc}} \cos x$, som alltså är definierad i intervallet $[-1, 1]$ med värdemängden $[0, \pi]$.

Genom att definiera beteckningen $\arccos x$ som talet y, för vilket $\cos y = x$, med andra ord

$$y = \arccos x \Longleftrightarrow \cos y = x\,,$$

så antar $\arccos x$ oändligt många värden, nämligen

$$\arccos x = \begin{cases} \overline{\text{arc}} \cos x + n2\pi \\ \pi - \overline{\text{arc}} \cos x + n2\pi\,. \end{cases}$$

(3) $\overline{\text{arc}} \tan x$. Eftersom tangens är strängt växande och kontinuerlig i intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, med hela $\mathbb{R}$ som värdemängd, så har restriktionen av tangens till det ifrågavarande intervallet en invers funktion $\overline{\text{arc}} \tan x$, som alltså är definierad i hela $\mathbb{R}$, och vars värdemängd är $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Genom att definiera $\arctan x$ som talet y, för vilket $\tan x = y$, med andra ord

$$y = \arctan x \Longleftrightarrow \tan y = x\,,$$

så antar $\arctan x$ oändligt många värden, nämligen

$$\arctan x = \overline{\text{arc}} \tan x + n\pi\,.$$

Märk att tangensfunktionens period är π.

Viktig anmärkning: Den allra viktigaste arcusfunktionen är $\overline{\text{arc}} \tan x$, eftersom den är definierad i hela $\mathbb{R}$ och $D\overline{\text{arc}} \tan x = \frac{1}{1+x^2}$ Funktionens betydelse framgår till exempel av att då $\frac{1}{1+x^2}$ integreras, så får vi $\overline{\text{arc}} \tan x$.

(4) $\overline{\text{arc}}\cot x$. Genom att definiera

$$y = \text{arc}\cot x \Longleftrightarrow \cot y = x\,,$$

så antar $\text{arc}\cot x$ oändligt många värden

$$\text{arc}\cot x = \overline{\text{arc}}\cot x + n\pi\,,$$

där $\overline{\text{arc}}\cot x$ är den i hela $\mathbb{R}$ definierade inversa funktionen till restriktionen av $\cot x$ i intervallet $(0, \pi)$.

Vi sammanfattar ännu de erhållna resultaten:

Sats 9.31. *Restriktionerna*

$$\begin{aligned} &\sin x\Big|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\\ &\cos x\Big|[0, \pi]\,,\\ &\tan x\Big|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\\ &\cot x\Big|(0, \pi)\,, \end{aligned}$$

har de inversa funktionerna

$$\begin{aligned} &\overline{\text{arc}}\sin x\,,\\ &\overline{\text{arc}}\cos x\,, \end{aligned}$$

som är definierade i intervallet $[-1, 1]$, *och de inversa funktionerna*

$$\begin{aligned} &\overline{\text{arc}}\tan x\,,\\ &\overline{\text{arc}}\cot x\,, \end{aligned}$$

som är definierade i hela $\mathbb{R}$.

De inversa funktionerna är deriverbara och

$$\begin{aligned} D\overline{\text{arc}}\sin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\\ D\overline{\text{arc}}\cos x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\\ D\overline{\text{arc}}\tan x &= \frac{1}{1+x^2}\,,\\ D\overline{\text{arc}}\cot x &= -\frac{1}{1+x^2}\,. \end{aligned}$$

Bevis. Antag att $|x| < \frac{\pi}{2}$ och $x = \sin y$ alltså är $y = \overline{\text{arc}}\sin x$. Då är

$$\begin{aligned} D\overline{\text{arc}}\sin x &= \frac{1}{D\sin y} = \frac{1}{\cos y}\\ &= \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,. \end{aligned}$$

Den negativa lösningen duger inte, ty $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Vidare är

$$\begin{aligned} D\overline{\text{arc}}\cos x &= \frac{1}{D\cos y} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\\ D\overline{\text{arc}}\tan x &= \frac{1}{D\tan y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}\,,\\ D\overline{\text{arc}}\cot x &= \frac{1}{D\cot y} = \frac{1}{-(1+\cot^2 y)} = -\frac{1}{1+x^2}\,. \end{aligned}$$

SLUT.