Luku 1

Sisätuloavaruudet

1.1 Määritelmät ja perusominaisuudet

Edellisessä luvussa rajoituttiin tarkastelu äärellisulotteisiin vektoriavaruuksiin, eli moduleihin kunnan yli. Tässä kurssin osiossa rajoitutamme tutkimuskohdettamme vielä rajummin ja tutkimme ainoastaan äärellisulotteisia $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$-kertoimisia vektoriavaruuksia ja niiden välisiä lineaarisia kuvauksia. Käytämme tutkimuksessamme uudenlaista työkalua eli *sisätuloa*.
Vaikka tämä erikoistapaus saattaa tuntua liian suppealta, se on erittäin tärkeä sovelluksissa, esimerkiksi fysiikassa.
Palautetaan ensin mieleen aikaisemmilta kursseilta tuttua $\mathbb{R}$-sisätulon käsitteen. Olkoon V $\mathbb{R}$-kertoiminen vektoriavaruus. Kuvaus $\langle , \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ sanotaan V:n sisätuloksi, jos

- $\langle , \rangle$ on R-bilineaarinen,
- $\langle , \rangle$ on symmetrinen, eli
$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$
kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$,
- kaikilla $x \in V$ pätee
$$\langle x, x \rangle \geq 0, \text{ja}$$
- $\langle x, x \rangle = 0$ jos ja vain jos $x = 0$.

Määritelmästä nähdään heti sisätulon erikoinen piirre - sen määritelmässä käytetään $\mathbb{R}$:n järjestysrelaatiota $\geq$, joten ei sitä voi yleistä suoraan mielivaltaisen kerroinkunnan tapaukseen.

$\mathbb{C}$- kertoimisissa vektoriavaruuksissa yllä annettua määritelmä emme voi sellaisenaan käyttää, sillä ei $\mathbb{C}$:ssä ole mielekästä järjestystä.
Olkoon $z = x + iy$ kompleksiluku, $x, y \in \mathbb{R}$. Määrittelemme z:n *konjugaatin* $\overline{x}$ kaavalla

$$\overline{z} = x - iy.$$

Tämä kaava määrittelee niin sanotun *konjugaattikuvauksen* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$. Jos joukon $\mathbb{C}$ ajattelee perinteisellä tavalla tasona, tämä kuvaus on siis yksinkertaisesti peilaus x-akselin suhteen.
Konjugaattkuvaus on kuntaisomorfismi, jonka käänteiskuvaus on konjugaattikuvaus itse. Lisäksi se on jopa $\mathbb{R}$-lineaarinen, jos $\mathbb{C}$ tulkitaan $\mathbb{R}$-avaruudeksi $\mathbb{R}^2$. Näiden väitteiden tarkka osoittaminen jätetään lukijalle harjoitustehtävänä. Pätee siis

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'},$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$$

kaikilla $z, z' \in \mathbb{C}$. Lisäksi kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee, että kompleksiluvut $z + \overline{z}$ ja $z\overline{z}$ ovatkin aina reaalilukuja. Osoitetaan tämän. Olkoon $z = x + iy$. Tällöin

$$z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x \in \mathbb{R},$$

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}.$$

Tässä viimeisessä yhtälössä esiintyvä lauseke $x^2 + y^2 = |z|^2$ on tason pisteen $(x, y) = z$ *normin* eli *itseisarvon* neliö. Jos $z \neq 0$ myös $|z|^2 \neq 0$, joten jakamalla sillä, saadaan

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1,$$

mistä seuraa, että voimme kirjoittaa uuden kaavan kompleksiluvun käänteisluvulle,

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Erityisesti $z^{-1} = \overline{z}$ jos ja vain jos $|z| = 1$ eli piste (x, y) sijaitsee yksikköympyrällä.
Olkoot V, W $\mathbb{C}$-kertoimisia vektoriavaruuksia. Sanomme, että kuvaus $L \colon V \to W$ on *puolilineaarinen*, jos kaikilla $x, y \in V$ ja $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$L(v + w) = L(v) + L(w),$$

$$L(zv) = \overline{z}L(v).$$

Nimitys tulee siitä, että kahden puolilineaarisen kuvauksen yhdistetty kuvaus on $\mathbb{C}$-lineaarinen (jos määritelty).

Tarvitsemme myös konjugaatti-version bilineaarisesta eli 2-lineaarisesta kuvauksesta.
Olkoot V, W, U $\mathbb{C}$-vektoriavaruudet. Sanomme, että kuvaus $F\colon V \times W \to U$ on *puolitoista-lineaarinen* eli 3/2-lineaarinen jos se on lineaarinen toisen muuttujan suhteen mutta puolilineaarinen toisen suhteen, eli jos kaikilla $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ ja $a \in \mathbb{C}$ pätee

$$F(v+v', w) = F(v,w) + F(v', w),$$

$$\begin{aligned} F(v, w+w') &= F(v,w) + F(v,w'), \\ F(av, w) &= aF(v,w), \\ F(v, aw) &= \overline{a}F(v,w). \end{aligned}$$

Jokainen puolilineaarinen tai puolitoistalineaarinen kuvaus voidaan tulkita lineaarisena tai bilineaarisena kuvauksena seuraavan konstruktion avulla.
Olkoon V $\mathbb{C}$-vektoriavaruus. Määritellään sen *konjugaatti* $\overline{V}$ $\mathbb{C}$-vektoriavaruutena seuraavasti. Joukkona $\overline{V} = V$ ja yhteenlasku siinä on sama kuin V:ssä. Skalaarikertolasku $\cdot\colon \mathbb{C} \times V \to V$ taas määritellään kaavalla

$$\lambda \cdot v = \overline{\lambda} v,$$

missä oikealla puolella esiintyy alkuperäinen skalaarikertolasku V:ssä. Helposti nähdään, että tällä tavalla määritelty algebrallinen struktuuri $(\overline{V}, +, \cdot)$ (tarkka todistus harjoitustehtävänä).
Tämän konstruktion avulla voimme tulkita puolilineaarinen kuvaus lineaarisena ja puolitoistalineaarinen kuvaus bilineaarisena. Tämä on hyödyllistä tietoa, sillä voimme soveltaa jo kehitettyä lineaaristen ja bilineaaristen kuvausten teoriaa 1/2 ja 3/2-lineaaristen kuvauksiin.

Lemma 1.1. *Olkoot V, W, U $\mathbb{C}$-vektoriavaruudet. Olkoot $L\colon V \to W$, $F\colon V \times W \to U$ kuvaukset. Tällöin L on puolilineaarinen jos ja vain jos se on lineaarinen kuvauksena $L\colon V \to \overline{W}$ tai kuvauksena $L\colon \overline{V} \to W$.*
F on puolestaan 3/2-lineaarinen jos ja vain jos se on bilineaarinen kuvauksena $F\colon V \times \overline{W} \to U$.

Todistus. Seuraa triviaalisti määritelmistä. □

Reaalilukujen $\mathbb{R}$ tulkitaan $\mathbb{C}$:n osajoukkona

$$\mathbb{R} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Helposti nähdään, että tällöin $\mathbb{R}$ koostuu tasan sellaisista kompleksiluvuista z joille pätee $z = \overline{z}$ eli jotka ovat itseensä konjugaatteja.

Tätä tulkintaa käyttämällä voimme yleistä joitakin $\mathbb{C}$-vektoriavaruuksiin ja konjugointiin liityviä määritelmiä myös $\mathbb{R}$-kertoimisessa tapauksessa. Tällä tavalla säästämme paljon aikaa eikä meidän tarvitse aina käsitellä erikseen $\mathbb{R}$-sisätuloavaruuksien ja $\mathbb{C}$-sisätuloavaruuksien teoriaa. Teemme siis seuraavan sopimuksen.
Symbolilla K tässä luvussa merkitsemme joko reaalilukujen kuntaa $\mathbb{R}$ tai kompleksilukujen kuntaa $\mathbb{C}$. Kunnassa K on määritelty konjugaattikuvaus $z \mapsto \overline{z}$, joka on $\mathbb{R}$-bilineaarinen algebraisomorfismi. Jokaiseen K-vektoriavaruuteen V liitämme sen *konjugaatti* $\overline{V}$, joka määritelty kuten yllä. Puhumme λ-lineaarisista kuvauksista, joissa $\lambda = 1/2$ tai $3/2$. Edellinen lemma pätee kun $\mathbb{C}$ siinä korvataan K:llä.
Tietysti kun $K = \mathbb{R}$ konjugaattikuvaus on yksinkertaisesti identtinen kuvaus ja jokaisen $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden V konjugaatti on se itse. Puolilineaarinen on tällöin sama asia kuin lineaarinen ja $3/2$-lineaarinen sama asia kuin bilineaarinen. Edellinen lemma on $\mathbb{R}$:n tapauksessa vailla varsinaista sisältöä.
Vaikka näiden havaintojen valossa tuntuu sopimuksemme tuntuu turhalta, se on kuitenkin hyödyllinen sillä se tarjoaa yhtenäisen näkemyksen sisätuloavaruusten teoriaan ja jossakin tapauksessa säästämme aikaa ja (virtuaalista) paperitilaa kun ei tuloksia tarvitse muotoilla ja käsitellä kahteen kertaan. Olkoon V K-vektoriavaruus. Sanomme, että kuvaus $\langle , \rangle \colon V \times V \to \mathbb{C}$ on *Hermiittinen muoto* V:ssä, jos se on $3/2$-lineaarinen ja toteuttaa ehdon

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}.$$

kaikilla $x, y \in V$.
Toisin sanoen $\langle , \rangle$ on Hermiittinen jos ja vain jos kaikilla $x, x', y \in V$ ja $a \in K$ pätee

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle, \tag{1.2}$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle, \tag{1.3}$$

$$\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle, \tag{1.4}$$

$$\langle x, ay \rangle = \overline{a}\langle x, y \rangle, \tag{1.5}$$

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}. \tag{1.6}$$

Tämä määritelmä on itse asiassa redundantti, sillä voidaan helposti näyttää, että ehdoista (1.2), (1.4) ja (1.6) seuraavat ehdot (1.3) ja (1.5)(harjoitustehtävä).

Kun $K = \mathbb{R}$ Hermiittinen muoto on sama asia kuin symmetrinen bilineaarinen muoto.
Olkoon $\langle , \rangle$ Hermiittinen muoto K-vektoriavaruudessa V. Tällöin ehdon (1.6) nojalla jokaisella $x \in V$ pätee

$$\langle x, x \rangle = \overline{\langle x, x \rangle}.$$

Toisin sanoen $a = \langle x, x \rangle$ on aina reaaliluku. Selvästi $\langle 0, 0 \rangle = 0$.

Määritelmä 1.7. *Olkoon $\langle , \rangle$ Hermiittinen muoto K-vektoriavaruudessa V. Sanomme sen V:n* sisätuloksi *jos se on* positiivisesti definiitti *eli jos*

$$\langle x, x \rangle > 0$$

kaikilla $x \in V, x \neq 0$.

Huomaa, että kun $K = \mathbb{R}$ saadaan sama määritelmä kuin aikaisemmin.
Sisätulolla $\langle , \rangle$ varustettu K-vektoriavaruus V sanomme *sisätuloavaruudeksi*. Samassa vektoriavaruudessa voidaan määritellä erilaisia sisätuloja, joten sisätulo on **lisästruktuuri** vektoriavaruudessa.
Tärkeämpiä sisätulon sovelluksia on yhteys geometriaan ja topologiaan, jonka se tarjoaa. Sisätulon avulla avaruudessa voidaan määritellä sellaiset käsitteet kuin etäisyys, vektorien väliset kulmat jne. Tämä tapahtuu *normin* kautta.
Olkoon V sisätuloavaruus, joka on varustettu sisätulolla $\langle , \rangle$. Koska jokaisella $x \in V$ suure $\langle x, x \rangle$ on ei-negatiivinen reaaliluku, voimme ottaa siitä (positiivisen) neliöjuuren ja määritellä x:n *normi* $|x|$ kaavalla

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Vektorien $x, y \in V$ välinen *etäisyys* määritellään kaavalla $|x - y|$.
Kuuluisasta *Scwartzin epäyhtälöstä* (jonka todistus käydään kohta läpi) seuraa, että tämä etäisyys toteuttaa luonnollisia etäisyyden ominaisuuksia eli on niin sanottu *metriikka*. Myös vektorien välisen kulman määrittäminen onnistuu saman epäyhtälön ansiosta. Palaamme tähän esimerkkien jälkeen.

Esimerkkejä 1.8. *1) Klassinen esimerkki $\mathbb{R}$-sisätulossa on avaruuden $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$)* pistetulo $\cdot$ *joka määritellään kaavalla*

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Yleisemmin, jos V on jokin n-ulotteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, jolla on kanta $\{e_1, \ldots, e_n\}$, voimme määritellä siinä sisätulo $\langle , \rangle$ kaavalla

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

missä $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ ja $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ on vektorien esitys tässä kannassa. Erityisesti siis jokaisessa äärellisulotteisessa $\mathbb{R}$-vektoriavaruudessa voidaan määritellä jokin sisätulo. Tästä seuraa, että voimme käyttää sisätuloa "lisätyökaluna" äärellisulotteisen lineaarialgebran tutkimisessa.

2) *Vastaavasti "standardi" sisätulo $\mathbb{C}$-vektoriavaruudessa $\mathbb{C}^n$ on pistetulo, joka on määritelty kaavalla*

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}. \tag{1.9}$$

Jos yritämme käyttää bilineaarista ja symmetrista muotoa $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (kuin $\mathbb{R}^n$:n tapauksessa), niin käy niin, että "vektorin x normi" $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ voi saada negatiivisia arvoja, tai ei ole edes reaaliluku. Koska intuitiomme mukaan etäisyydet ovat positiivisia reaalilukuja, näin ei voi menetellä. Kun $n = 1$ avaruus on $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ja voimme käyttää normina tavallista tason pisteen normia $\sqrt{x^2 + y^2}$, jonka kompleksilukumerkein voi kirjoittaa muodossa $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, $z = x + iy$. Yleistämällä tätä n-ulotteiseen avaruuteen $\mathbb{C}^n$ voimme määritellä jonon $z = (z_1, \ldots, z_n)$ "luonnollisen" normin kaavalla

$$|z|^2 = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2.$$

Helposti nähdään, että tämä on juuri normi, joka liittyy Hermiittiseen muotoon (1.9).
Historiallisesti juuri muoto (1.9) (tai siis sen ominaisuudet) toimi alkuperäisen $\mathbb{C}$-sisätulon käsitteen motivaatioksi.

3) *Olkoon $I = [a, b]$ suljettu väli $\mathbb{R}$:ssä, $a < b$. Olkoon $V = \{f \colon [a, b] \to \mathbb{C} \mid f \text{ on jatkuva } \}$. Tällöin V on $\mathbb{C}$-vektoriavaruus ja kaava*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

määrittelee V:n sisätulon. Avaruuden V määritelmässä voidaan korvata vaatimus "f on jatkuva" vaatimuksella f on Riemann-integroituva" *tai jopa "Lebesquen-integroituva". Kompleksisen funktion $f = u + iv$, missä $u, v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, integraali määritellään "komponenteittain" eli*

$$\int f = \int u + i \int v.$$

Kun tarkastellaan kaikkien Lebesquen-integroituvien funktioiden avaruutta tällä sisätulolla varustettuna, se merkitään symbolilla $L^2([a,b];\mathbb{C})$. Tämä ääretönulotteinen sisätulo-avaruus on erittäin tärkeä esimerkki täydellisestä *sisätuloavaruudessa eli Hilbertin sisätuloavaruudessa. "Täydellisyys" tässä viittaa tämän avaruuden metrisen topologian ominaisuuden, jossa jokainen jono, joka "näyttää suppenevan" suppenee oikeasti. Jos määritelmässä yllä otetaan vain kaikki jatkuvat funktiot tai jopa kaikki Riemann-integroituvat funktiot, niin näin saatu sisätuloavaruus ei enää ole täydellinen. Tämä on yksi syy siihen miksi Lebesque-integraali on "parempi" kuin Riemann-integraali.*
Tarkemmin näistä asioista ja L^p-avaruuksista kursseilla "Mitta ja integraali" ja "Funktionaalianalyysi"

Lemma 1.10. Cauchy-Schwartz epäyhtälö.
Olkoon $\langle , \rangle$ sisätulo K-vektoriavaruudessa V. Olkoot $x, y \in V$. Tällöin

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x|\,|y|$$

Tässä vasemmalla puoleella kompleksilukujen itseisarvo, oikealla puolella sisätulon määritelemä normi

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Lisäksi yhtälö

$$|\langle x, y\rangle| = |x|\,|y|$$

pätee jos ja vain jos $\{x, y\}$ on sidottu joukko.

Todistus. Jokainen kompleksiluku $z = x + iy$ voidaan kirjoittaa muotoon $z = rt$, missä $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ ja $t \in \mathbb{C}$ sellainen, että $|t| = 1$. Kun $z \neq 0$ tämä saadaan aikaan määrittelemällä $t = z/r$ ja kun $z = 0$ voidaan valita t mielivaltaisesti, esim. $t = 1$. Huomataan heti, että tässä $t^{-1} = \bar{t}$, sillä t:n normi on 1.
Kirjoitetaan kompleksiluku $z = \langle x, y\rangle$ muodossa rt, missä $r = |z| \in \mathbb{R}$ ja $|t| = 1$.
Olkoon $a \in \mathbb{R}$ mielivaltainen ja tarkastellaan vektorin $ax+ty$ sisätulo itseensä kanssa. Tällöin

$$0 \leq \langle ax + ty, ax + ty\rangle = a^2\,|x|^2 + |t|^2\,|y|^2 + at\langle y, x\rangle + a\bar{t}\langle x, y\rangle.$$

Tässä $|t|^2 = 1$ ja $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} = \overline{rt} = r\bar{t}$. Näin ollen

$$t\langle y, x\rangle + \bar{t}\langle x, y\rangle = rt\bar{t} + r\bar{t}t = 2rt\bar{t} = 2r\,|t| = 2r,$$

joten saadaan jokaisella $a \in \mathbb{R}$

$$|x|^2\, a^2 + 2a\,|\langle x, y\rangle| + |y|^2 \geq 0.$$

Vasemmalla puoleella oleva lauseke voidaan ajatella a:n suhteen toiseen asteen funktiona. Tämä funktio siis on aina positiivinen, joten sen diskriminantin

$$D = 4\,|\langle x, y\rangle|^2 - 4\,|x|^2\,|x|^2 \leq 0.$$

Jakamalla 4:llä, siirtämällä toinen termi toiselle puolelle ja ottamalla neliöjuuri epäyhtälön molemmista puolesta saadaan väite osoitettu.
Yhtälö pätee jos ja vain jos diskriminantti on tasan nolla, eli jos ja vain jos on olemassa $a \in \mathbb{R}$ jolle

$$\langle ax + ty, ax + ty\rangle = 0.$$

Tämä on yhtäpitävä sen kanssa, että $ax + ty = 0$ jollakin $a \in \mathbb{R}$. Koska tässä $t \neq 0$, jonon (x, y) täytyy tällöin olla sidottu.
Kääntäen, jos jono (x, y) on sidottu, niin joko $y = 0$ tai $x \in \mathrm{Span}(y)$ eli $x = cz$ jollakin $c \in \mathbb{C}$. Helposti nähdään suoraan, että molemmissa tapauksessa Cauchy-Schwartzin epäyhtälö päte yhtälönä. $\square$

Seuraus 1.11. *Olkoon V K-sisätuloavaruus V ja olkoon $|x|$ sen normi. Olkoot $x, y \in V$, $a \in K$. Tällöin*

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$, *(kolmioepäyhtälö),*
2. $|ax| = |a|\,|x|$,
3. $|x| \geq 0$ *ja* $|x| = 0$ *jos ja vain jos* $x = 0$.

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Mikä tahansa K-vektoriavaruudessa V määritelty kuvaus $||: V \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa edellisen Seurauksen ehdot (1)-(3) sanotaan V:n *normiksi*. Olemme osoittaneet, että jokainen sisätulo määrittelee erään normin avaruudessa V. Käänteinen väite ei päde - on olemassa normit, jotka eivät ole minkään sisätulon "määräämiä". Voidaan osoittaa, että normi $||$ on sisätulon määräämä jos ja vain jos se toteuttaa niin sanotun *suunnikassäännön* eli kaikilla $x, y \in V$ pätee

$$|x + y| + |x - y| = 2(|x| + |y|).$$

Nimitys "suunnikassääntö" tulee siitä, että tavallisen tason normin $|x| = \sqrt{x^2 + y^2}$ tapauksessa tämä sääntö ilmaisee sen geometrisen tosiasian että suunnikaan lävistäjien pituuksien summa on sama kuin suunnikaan piiri eli kaikkien sivujen pituuksien summa.
Vektoriavaruus, joka on varustettu jollakin normilla, sanotaan *normiavaruudeksi.* Jokaisessa normiavaruudessa, erityisesti siis jokaisessa sisätuloavaruudessa, on olemassa luonnollinen etäisyys, eli *metriikka.* Tämä määritellään kaavalla

$$d(x, y) = |x - y|\,.$$

Tämä kuvaus toteuttaa kaikki metriikan aksioomat eli

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ kaikilla } x, y, z \in V, \text{ (kolmioepäyhtälö)},$$

$$d(x, y) = d(y, x) \text{ kaikilla } x, y \in V, \text{ (symmetrisyys)},$$

$$d(x, x) \geq 0 \text{ kaikilla } x, \in V,$$

$$d(x, x) = 0 \text{ jos ja vain jos } x = 0.$$

Tämän konstruktion avulla päästään puhumaan normiavaruuden *topologisista* eli "geometrisista" ominaisuuksista. Me emme varsinaisesti mene tähän suuntaan, joten yllä olevat tulokset ja käsitteet mainittu lähinnä täydellisyyteen ja yleissivistyksen takia.
Avaruuden K^n standardikanta $(e_1, \ldots, e_n)$ toteuttaa standardin pistetulon $\cdot$ suhteen yhtälön

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}.$$

Tämä on esimerkki *ortonormaalisesta* kannasta.

Määritelmä 1.12. *Olkoon V sisätuloavaruus. Sen osajoukko A on ortogonaalinen, jos kaikilla $a, b \in A, a \neq b$ pätee $\langle a, b\rangle = 0$. Ortogonaalinen osajoukko on ortonormaali jos lisäksi $\langle a, a\rangle = 1$ kaikilla $a \in A$.*

Pannaan heti merkille seuraava yksinkertainen, mutta hyödyllinen havainto.

Lemma 1.13. *Olkoon $(e_1, \ldots, e_n)$ ortonormaali jono sisätuloavaruudessa V. Olkoon*

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i.$$

Tällöin kaikilla $j = 1, \ldots, n$ pätee

$$a_j = \langle x, e_j\rangle.$$

Erityisesti jokainen ortonormaali joukko on vapaa.

Todistus. Tämä on helppo lasku,

$$\langle x, e_i \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle e_i, e_j \rangle = a_j.$$

Lineaarisen kombinaation

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

termit ovat siis yksikäsitteisesti määrättyä, joten mikä tahansa ortonormaali osajoukko on vapaa. □

Lemma 1.14. *(***Gram-Schmidt ortogonaalisaatio***).*
Olkoon $(e_1, \ldots, e_n)$ *sisätuloavaruuden* V *vapaa osajoukko. Tällöin on olemassa ortonormaali joukko* $(f_1, \ldots, f_n)$ *siten, että*

$$\mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Span}(f_1, \ldots, f_k)$$

kaikilla $k = 1, \ldots, n$.
Erityisesti jokaisella äärellisulotteisella sisätuloavaruudella on ortonormaali kanta.

Todistus. Jono $(f_1, \ldots, f_n)$ konstruoidaan induktiolla. Alkuaskeleena asetetaan $f_1 = e_1 / |e|$, tällöin $|f_1| = 1$ ja $\mathrm{Span}(e_1) = \mathrm{Span}(f_1)$.
Oletetaan, että $l < n$ ja oletetaan, että olemme konstruoineet ortonormaali jono $(f_1, \ldots, f_l)$ siten, että $\mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Span}(f_1, \ldots, f_k)$ kaikilla $k = 1, \ldots, l$. Meidän pitää konstruoida f_{l+1} siten, että samat ehdot ovat voimassa.
Etsitään ensin $f' \neq 0$ jolle $\mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_l, e_{l+1}) = \mathrm{Span}(f_1, \ldots, f_l, f')$ ja lisäksi jono $(f_1, \ldots, f_l, f')$ ortogonaalinen. Sitten kun sellainen löytyy riittää vain normeerata se, eli asettaa

$$f_{l+1} = f' / |f'| .$$

Koska induktiooletuksen nojalla pätee $\mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_l) = \mathrm{Span}(f_1, \ldots, f_l)$, ehdosta $\mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_l, e_{l+1}) = \mathrm{Span}(f_1, \ldots, f_l, f')$ seuraa, että $f' \in \mathrm{Span}(f_1, \ldots, f_l, e_{l+1})$, joten etsitään f' joka on muodossa

$$f' = e_{l+1} + a_1 f_1 + \ldots + a_l f_l$$

joillakin skalaareilla $a_1, \ldots, a_l$. Huomataan jo tässä vaiheessa, että jos f' on mikä tahansa sellaista muotoa oleva alkio on nolla-alkiosta eroava ja lisäksi sille pätee $\mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_l, e_{l+1}) = \mathrm{Span}(f_1, \ldots, f_l, f')$. Pitää vain asettaa skalaarit $a_1, \ldots, a_n$ niin, että ortogonaalisuuden ehto on voimassa eli pätee

$\langle f_i, f' \rangle = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, l$. Koska $f' = e_{l+1} + a_1 f_1 + \ldots + a_l f_l$, saadaan jonon $(f_1, \ldots, f_l)$ ortogonaalisuuden nojalla

$$0 = \langle f', f_i \rangle = \langle e_{l+1}, f_i \rangle + a_1 \langle f_1, f_i \rangle + \ldots + a_i \langle f_i, f_i \rangle + \ldots + a_l \langle f_l, f_i \rangle = \langle e_{l+1}, f_i \rangle + a_i,$$

eli

$$a_i = -\langle e_{l+1}, f_i \rangle$$

kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Kun nämä sijoitetaan yllä f':n määritelmän, tämä vektori toteuttaa vaaditut ehdot. □

Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoon $\langle , \rangle$ sisätulo V:ssä. Edellisen lemman mukaan V:llä on olemassa ortonormaali kanta $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Olkoot $x, y \in V$. Esitetään ne kunnassa $\mathbf{e}$ eli muodossa

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

Tällöin sisätulon ominaisuuksista seuraa, että

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j}^{n} x_i \overline{y_j} \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Siis ortonormaalissa kannassa n-ulotteisen sisätuloavaruuden sisätulo "näyttää" samanlaiselta kuin K^n:n standardi pistetulo.
Olkoon W äärellisulotteisen sisätuloavaruuden V aliavaruus. Tiedämme yleisestä vektoriavaruuksien teoriasta, että W:llä on V:ssä komplementti U. Yleisesti tällaisia komplementteja voidaan valita hyvin monella tavalla eikä ole mitään "kanonista" tapa valita niistä yksi "oikea". Sisätuloavaruuksissa tällainen tapa valita yksi kanoninen komplementti löytyy.
Sitä varten tehdään seuraava määritelmä. Olkoon $A \subset V$ sisätuloavaruuden V mielivaltainen osajoukko. Määritellään sen *ortogonaalinen komplementti* ehdolla

$$A^{\perp} = \{ w \in V \mid \langle a, w \rangle = 0 \text{ kaikilla } a \in A \}.$$

Lemma 1.15. *Olkoon $A \subset V$, V sisätuloavaruus. Tällöin*
1) $A^{\perp}$ on V:n aliavaruus.
2) Jos V on äärellisulotteinen ja $A = W$ on aliavaruus, niin

$$W \oplus W^{\perp} = V$$

eli $W^{\perp}$ on W:n komplementti V:ssä.

Todistus. 1) Harjoitustehtävä.
2) Osoitetaan, että $W \cap W^{\perp} = \{0\}$. Olkoon $w \in W$ siten, että $w \in W^{\perp}$. Tällöin ortogonaalisen komplementit määritelmän nojalla erityisesti $\langle w, w \rangle = 0$. Sisätulon määritelmän nojalla tästä taas seuraa, että $w = 0$.
Aliavaruudet W ja $W^{\perp}$ siis muodostavat suoran summan. Osoitetaan, että sen arvo on koko avaruus V. Olkoon $v \in V$. Koska V on äärellisulotteinen, myös W on, joten voimme valita sille kanta $(e_1, \ldots, e_k)$. Lisäksi Lemman 1.14 nojalla voimme olettaa, että tämä kanta on ortonormaali.
Jokaisella $i = 1, \ldots, k$ olkoon $a_i = \langle e_i, v \rangle$. Vektori

$$w = \sum_{j=1}^{k} \overline{a_j} e_j$$

on tällöin W:n vektorin (kohta nähdään mihin konjugaatti tarvitaan). Osoitetaan, että vektori $w' = v - w \in W^{\perp}$. Tällöin $v = w + w' \in W + W^{\perp}$ ja väite on todistettu.
Avaruuden W jokainen alkio u voidaan kirjoittaa muodossa

$$u = \sum_{i=1}^{k} u_i e_i,$$

mistä seuraa, että

$$\langle u, w' \rangle = \sum_{i=1}^{k} u_i \langle e_i, w' \rangle.$$

Näin ollen riittää osoittaa, että $\langle e_i, w' \rangle = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Mutta

$$\langle e_i, w' \rangle = \langle e_i, v \rangle - \langle e_i, w \rangle,$$

joten riittää näyttää, että

$$\langle e_i, v \rangle = \langle e_i, w \rangle$$

kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Mutta

$$\langle e_i, w \rangle = \langle e_i, \sum_{j=1}^{k} \overline{a_j} e_j \rangle = \sum_{j=1} a_j \langle e_i, e_j \rangle = a_j = \langle e_i, v \rangle.$$

□