3.3 Polynomialgebran sovelluksia lineaarialgebrassa

Olkoon V n-ulotteinen K-vektoriavaruus, $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $L(V) = \{L\colon V \to V \mid L \text{ on } K\text{-lineaarinen}\}$ on ykkösellinen K-algebra (kertolaskuna kuvausten yhdistäminen). Tästä seuraa, että jokaisella $p \in P(K)$ ja $L \in L(V)$ voidaan määritellä sijoitushomomorfismin avulla alkio $p(L) \in L(V)$. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jos $p = c_0 + c_1X + \ldots + c_nX^n$, niin

$$p(L) = c_0 \operatorname{id} + c_1L + \ldots + c_nL^n.$$

Koska $L(V)$ on äärellisulotteinen, itse asiassa n^2-ulotteinen, K-vektoriavaruus, Lemmasta (3.27) seuraa, että jokainen sen alkio on algebrallinen. Toisin sanoen jokaisella $L \in L(V)$ on olemassa (yksikäsitteinen) *minimipolynomi*, joka merkitsemme symbolilla m_L. Koska $K[X]/(m_L) \cong K[L]$, missä $K[L]$ on korkeintaan n^2-ulottinen, Lemman (3.27) nojalla $\deg m_L \leq n^2$. Itse asiassa, osoittautuu, että aina $\deg m_L \leq n$. Tämä on seuraus Cayley-Hamiltonin Lauseesta, jonka todistamme tässä aliluvussa.

Samalla tavalla voidaan menetellä matriisien kanssa. Olkoon $A\colon M(n\times n; K)$ neliömatriisi. Koska $M(n\times n; K)$ on ykkösellinen algebra, on olemassa sijoitushomorfismi $\phi_A\colon P(K) \to M(n\times n; K)$ eli jokaisella $p \in K[X]$ voimme muodostaa neliömatrisin $p(A) \in M(n \times n; K)$. Koska viimeksi mainittu on K-vektoriavaruutena n^2-ulotteinen, täsmälleen samalla tavalla kuin yllä nähdään, että A:llä on olemassa yksikäsitteinen *minimipolynomi* m_A. Jos n-ulotteisessa K-vektoriavaruudessa V kiinnitetään kanta $\mathbf{e} = (\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})$, niin se määrittelee kanonisen algebraisomorfismin $\Phi_{\mathbf{e}}\colon L(V) \to M(n \times n; R)$. Tämä kuvaa L:n sen matriisiksi $[L]_{\mathbf{e}}$ kannassa $\mathbf{e}$. Koska $\Phi_{\mathbf{e}}$ on algebraisomorfismi, L:n ja matriisin $[L]_{\mathbf{e}}$ minimipolynomit ovat samat, $m_L = m_[L]_{\mathbf{e}}$ (mieti miten se näytetään täsmällisesti).

Esimerkki 3.28. *Lineaarioperaattori $L\colon V \to V$ on* nilpotentti, *jos on olemassa $m \in \mathbb{N}$ jolle $L^m = 0$. Samoin neliömatriisi A on nilpotentti, jos $A^m = 0$ jollakin $m \in \mathbb{N}$. Pienin sellainen m sanotaan nilpotentin operaattorin/matriisin* asteeksi.
Olkoon m nilpotentin operaattorin L (matriisin A) aste. Tällöin polynomille $p = X^m$ pätee $p(L)(p(A)) = 0$. Näytetään, että p on itse asiassa L:n (A:n) minimipolynomi. Jos q on minimipolynomi, niin joka tapauksessa q jakaa p:n. Mutta helposti päätellään (esim. hajotelmalauseen avulla), että X^m:n tekijät ovat (kerrointa vaille) muotoa X^k, $0 \leq k \leq m$. Koska asteen määritelmän mukaan m on pienin sellainen luku k, jolle X^k nollaa L:n (A:n),

niin täytyy olla $m_L = X^m = m_A$.

Tyyppilinen esimerkki nilpotenttista operaattorista on esimerkissä 3.1 tarkasteltu derivaattaoperaatori $\mathcal{D}\colon P_n \to P_n$. Tämän aste on tasan n.

Minimipolynomin lisäksi jokaiseen operaattoriin ja matriisiin voidaan liittää niin sanottu *karakteristinen polynomi* χ_L (χ_A). Tämä on itse asiassa (johtava kerrointa vaille) sama polynomi, josta puhuttiin jo aikaisemmin ominaisarvojen yhteydessä, eli polynomi $\lambda \mapsto \det(\lambda I - A)$.
Näin ajateltuna se on kuitenkin *polynomifunktio*, ei abstrakti algebrallinen polynomi, joten meidän on keksittävää tapaa määritellä se polynomialgebran $K[X]$ alkiona.

Määritellään se ensin matriiseille. Olkoon A $(n \times n)$-matriisi. Tavoitteena olisi tietenkin määritellä $\chi_A \in K[X]$ siten, että $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, jokaisella $\lambda \in K$. Mutta tämä on polynomifunktio $K \to K$, joten emme voi tehdä siitä yleisesti suoraan $K[X]$:n alkio, sillä samaa polynomifunktioita voi vastata yleisesti ottaen monta erilaista $K[X]$:n alkiota.
Yksi tapa olisi huomata, että määritelmän mukaan

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = \sum_{\sigma \in S_n} (a_{\sigma(1)1} - x\delta_{\sigma(1)1})((a_{\sigma(2)2} - x\delta_{\sigma(2)2}) \dots (a_{\sigma(n)n} - x\delta_{\sigma(n)n}),$$

missä δ_{ij} on Kronickerin delta (jonka arvo on yksi kun $i = j$ ja nolla muuten). "Apinoimalla" tätä kaavaa voidaan määritellä

$$\chi_A = \sum_{\sigma \in S_n} (a_{\sigma(1)1} - X\delta_{\sigma(1)1})((a_{\sigma(2)2} - X\delta_{\sigma(2)2}) \dots (a_{\sigma(n)n} - X\delta_{\sigma(n)n}).$$

Tämä on hyvin määritelty $P(K)$:n alkio, mutta tällainen konstruuktio on kömpelö ja siitä on vaikeata soveltaa.
Paljon tyylikkämpi lähestymistapa olisi seuraavanlainen. Polynomialgebra $P(K)$ on vaihdannainen rengas, joten voimme muun muassa muodostaa neliömatriisit, jonka kertoimet ovat $P(K)$:n alkiot ja laskea sellaisten matriisien determinaantit. Koska $K \subset P(K)$ (samastetaan kunnan alkiot ja vakiopolynomit), jokainen K-kertoiminen matriisi voi ajatella $P(K)$-kertoimisena matriisina, erityisesti A voidaan ajatella sellaisena. Näin ollen, on olemassa myös $P(K)$-kertoiminen matriisi $X - AI$, jonka (ij)-alkio on $\delta_{ij}X - a_{ij}$. Tämän matriisin determinantti $\det(XI - A)$ on renkaan $P(K)$ alkio ja se lasketaan samalla kaavalla kuin yllä, eli

$$\det(XI - A) = \sum_{\sigma \in S_n} (X\delta_{\sigma(1)1} - a_{\sigma(1)1})(X\delta_{\sigma(2)2} - a_{\sigma(2)2}) \dots (X\delta_{\sigma(n)n} - a_{\sigma(n)n}).$$

Näin ollen voimme määritellä $\chi_A = \det(XI - A)$ ja saamme saman tuloksen kuin ennen. Jos algebralliseen polynomiin χ_A sijoitetaan alkio $\lambda \in K$, saamme saman polynomikuvauksen $\chi_A(\lambda)$ arvon, kuin ennenkin. Erityisesti polynomin $\chi_K \in K[X]$ juuret kunnassa K ovat edellenkin kaikki A:n ominaisarvot.
Kutsumme χ_A matriisin A *karakteristiseksi polynomiksi.* Syy siihen, miksi määrittelemme sen polynomina $\det(XI - A)$, eikä polynomina $\det(A - XI)$ (kuten ennen) on tietenkin siinä, että tällöin se on aina pääpolynomi.
Jotta voisimme määritellä operaattorin L karakteristisen polynomin, meidän on ensin osoitettavaa, että similaarisilla matriseilla on sama karakteristinen polynomi. Onneksi tämä on helppoa.

Lemma 3.29. *Olkoot $A, Y \in M(n \times n; K)$, missä Y on kääntyvä. Olkoon $B = YAY^{-1}$. Tällöin*

$$\chi_A = \chi_B.$$

Todistus. Käsittelemme matriisit A, B ja Y $K[X]$-kertoimisina matriiseina, kuten yllä. Pätee

$$B - XI = YAY^{-1} - XI = YAY^{-1} - Y(XI)Y^{-1} = Y(A - XI)Y^{-1},$$

joten

$$\chi_B = \det(B - XI) = \det Y \det(A - XI)(\det Y)^{-1} = \det(A - XI) = \chi_A.$$

Käytämme tässä determinaantien ominaisuuksia, jotka ovat voimassa, koska $K[X]$ on vaihdanninen rengas. $\square$

Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori. Olkoon $\mathbf{e}$ jokin V:n kanta. Määritelemme $\chi_L = \chi_A$, missä $A = [L]_{\mathbf{e}}$. Tämä määritelmä ei riipu kannan valinnasta, sillä jos $\mathbf{e}'$ on toinen kanta, niin $B = [L]_{\mathbf{e}'} = YAY^{-1}$, missä Y on eräs kannanvaihtomatriisi. Edellisen lemman nojalla $\chi_B = \chi_A$.
Operaattorin karakteristen polynomin χ_L juuret kunnassa K ovat L:n ominaisarvot. Operaattorin L ominaisarvon λ *algebrallinen kertaluku* on sen kertaluku polynomin χ_L juurena.

Lemma 3.30. *Operaattorin $L\colon V \to V$ ominaisarvon λ geometrinen kertaluku on pienempi tai yhtä suuri kuin sen algebrallinen kertaluku.*

Todistus. Olkoon $V_\lambda = \{x \in V \mid L(x) = \lambda x\}$ ominaisarvoalivaruus. Valitaan V':lle jokin kanta $(e_1, \ldots, e_k)$, missä $k = \dim V_\lambda$ ja täydennetään se koko avaruuden kannaksi $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Tämän kannan suhteen L:n matriisin

k ensimäistä saraketta sisältävät λ diagonaalilla ja nollat muaalla, mistä seuraa, että

$$\chi_L = (X - \lambda)^k q,$$

missä q on jokin polynomi (laske determinaantti kehittämällä ensimmäisen sarakkeen suhteen, sitten toisen ja niin edelleen k'nnen sarakkeen asti). Tästä seuraa, että λ:n (algebrallinen) kertaluku χ_L:n juurena on ainakin k. $\square$

Esimerkki 3.31. *Olemme nähneet jo esimerkin ominaisarvosta, jonka algebrallinen kertaluku on aidosti suurempi kuin sen geometrinen kertaluku, nimittäin esimerkissä 3.7, 1). Siinä matriisin*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1. \end{bmatrix}$$

karakteristinen yhtälö on $(X-1)^2$, jolla sillä on yksi juuri 1, jonka kertaluku on 2. Vastaava ominaisarvoaliavaruus $V_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ on kuitenkin yksiulotteinen, joten tämän ominaisarvon geometrinen kertaluku on 1.

Seuraava tulos kuuluu lineaariaglebraan tärkeämpiin perustuloksiin.

Lause 3.32. *(***Cayley-Hamiltonin Lause.***)*
Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarinen kuvaus ja $A \in M(n \times n; K)$ matriisi. Tällöin

$$\chi_L(L) = 0,$$

$$\chi_A(A) = 0.$$

Todistus. Väite riittää osoittaa matriiseille, sillä operaattorin L karakteristisen polynomin arvo L:ssä on isomorfiaa vaille sama kuin sen matriisin (jonkun kannan suhteen) karakteristisen polynomin arvo siinä matriisissa.

Olkoon K' jokin kunnan K sisältävä algebrallisesti suljettu kunta (joka on olemassa Proposition 3.8 mukaan). Jokainen K-kertoiminen matriisi voi ajatella K'-kertoimisena matriisina. Selvästi sen karakterteristinen polynomi ei riippu siitä, missä kunnassa se tarkastellaan. Näin ollen, riittää todistaa väite algebrallisesti suljettulle kunnalle.

Olkoon K siis algebrallisesti suljettu. Osoitetaan väite operaattorille $L\colon V \to V$, missä V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus (matriiseille se taas seuraa tällöin isomorfismin Φ välityksellä).
Proposition 3.12 ja Lemman 3.10 nojalla on olemassa ketju V:n aliavaruuksia

$$W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_{n-1} \subset V,$$

siten, että $\dim W_i = i$ jokaisella $i = 1, \ldots, n-1$ ja jokainen aliavaruus W_i on L-invariantti. Tässä $n = \dim V$. Voimme valita V:lle kannan $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, siten, että $(e_1, \ldots, e_k)$ on avaruuden W_k kanta jokaisella $k = 1, \ldots, n$. Tämän kanna suhteen L:n matriisihan on yläkolmiomatriisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}. \end{bmatrix}$$

ja

$$L(e_i) = x + a_{ii}e_i = x + \lambda_i e_i,$$

missä $x \in W_{i-1}$, jokaisella $i = 1, \ldots, n$ (missä $W_{-1} = \{0\}$)). Tässä merkitsemme $a_{ii} = \lambda_i$. Jos L:n matriisina käytetään matriisiä A, niin

$$\chi_L = \chi_A$$

on polynomi $\det(XI - A)$, missä $XI - A$ on yläkolmiomatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat $X - \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$. Koska yläkolmiomatriisin determinaantti on sen diagonaalialkioiden tulo, saadaan siis

$$\chi_L = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i).$$

Nyt $(X - \lambda_i)(L)(e_i) = (L - \lambda_i)(e_i) \in W_{i-1}$ jokaisella i, joten $(X - \lambda_i)(L) \subset W_{i-1}$. Saadaan

$$\chi_L(L)(V) = \prod_{i=1}^{n} (L - \lambda_i)(V) \subset \prod_{i=1}^{n-1} (X - \lambda_i) W_{n-1} \subset \ldots \subset (X - \lambda_1)(W_1) = 0,$$

joten $\chi_L(L)$ on nolla-operaattori, mitä pitikin todistaa. $\square$

-**Huomatus:** Joskus Cayleu-Hamiltonin lauseelle esitetään seuraava houkuttelevan yksinkertaiselta näyttävä, mutta täysin virheellinen "todistus". Määritelmän mukaan $\chi_A = \det(A - XI)$, joten sijoittamalla X:n paikalle matriisi A saadaan

$$\chi_A(A) = \det(A - AI) = \det(A - A) = \det 0 = 0.$$

Erittäin hyvä harjoitus on miettiä, miksi tässä ei ole mitään järkeä.

Seuraus 3.33. *Kuvauksen (tai matriisin) minimipolynomi jakaa karakteristisen polynomin. Erityisesti minimipolynomin aste on korkeintaan avaruuden V aste. Lisäksi minimipolynomilla ja karakteristisella polynomilla on samat juuret.*

Todistus. Tarkastellaan asiaa operaattorin L polynomeille, matriisille todistus samanlainen. Määritelmän mukaan m_L jakaa jokaisen polynomin, jonka juurena L on. Koska edellisen tuloksen nojalla χ_L on sellainen, ensimmäinen väite on nyt selvä. Erityisesi minimipolynomin jokainen juuri on myös karaktertisten polynomin juuri.

Olkoon kääntäen λ jokin karakteristisen yhtälön χ_L juuri. Määritelmän mukaan se tarkoittaa sitä, että λ on L:n ominaisarvo eli on olemassa $x \neq 0$ siten, että $L(x) = \lambda x$. Tästä seuraa, että $L^n(x) = \lambda^n x$, joten jos yleisemmin $p = c_n X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_1 X + c_0 \in K[X]$ on polynomi, niin $p(L)(x) = p(\lambda)x$. Näin ollen eritysesti

$$0 = m_L(L)(x) = m_L(\lambda)x,$$

ja, koska $x \neq 0$, $m_L(\lambda) = 0$. $\square$

Olkoon K algebrallisesti suljettu kunta, A jokin K-kertoiminen $n \times n$-matriisi ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (kaikki) karakterisen polynomin χ_A juuret (eli matriisin ominaisarvot). Tällöin

$$\chi_A = (X - \lambda_1)^{m_1}(X - \lambda_2)^{m_2} \ldots (X - \lambda_k)^{m_k},$$

missä m_i on juuren λ_i kertaluku. Koska χ_A on tasan n-asteinen,

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

Koska edellisen seurauksen nojalla minimipolynomilla m_A on samat juuret $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ja lisäksi m_A on χ_A:n tekijä, niin

$$\chi_A = (X - \lambda_1)^{m'_1}(X - \lambda_2)^{m'_2} \ldots (X - \lambda_k)^{m'_k},$$

missä $1 \leq m'_i \leq m_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Minimipolynomi ja karakteristinen polynomi ovat samat täsmälleen silloin kun $m'_i = m_i$ kaikilla i yllä, tai täsmälleen silloin kuin m_A:n aste on n.
Jos K ei ole algebrallisesti suljettu, χ_A ei vältämättä pysty jakamaan ensimmäisen asteen tekijöihin. Kuitenkin siinäkin tapauksessa pätee edellisen havainnon suora yleistys - polynomeilla m_A ja χ_A on samat jaottomat tekijät eli jaoton polynomi p jakaa χ_A:n jos ja vain jos se jakaa m_A:n. Todistus

sivutetaan.

Edellisen kappaleen tulokset pätevät sellaisinaan tietysti siinä tapauksessa, että matriisi A korvataan operaattorilla L.

Jordanin normaali muoto.

Olkoon $L\colon V \to V$ nilpotentti operaattori ja olkoon m sen aste. Tällöin polynomi X^m nollaa L:n, mutta mikään sen aito tekijä X^k, $k \leq m$ ei enää nollaa L:ää, joten X^m on L:n minimipolynomi. Edellisten tulosten nojalla L:n aste $m \leq n = \dim V$. Tämä tulos seuraa myös seuraavasta lemmasta, jos valitaan siinä v:ksi jokin alkio jolle $L^{m-1}v \neq 0$.
Esimerkiksi olkoon $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operaattori, jonka matriisi standartikantojen suhteen on

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällön $L^2 = 0$ ja $L \neq 0$, joten L on nilpotentti ja sen minimipolynomi on X^2. Karakterstinen polynomi on X^3.

Olkoon L nilpotentti operaattori. Koska L:n ominaisarvot ovat samalla sen minimipolynomin juuret (Seuraus 3.33) ja minimipolynomi on tässä tapauksessa muotoa X^m, niin 0 on L:n ainoa ominaisarvo. Erityisesti, jos $L \neq 0$, se ei voi olla diagonalisoituva.

Lemma 3.34. *Olkoon $L\colon V \to V$ nilpotentti operaattori ja olkoon $v \in V$. Olkoon m pienin luonnollinen luku m jolle $L^m(v) = 0$ (olemassa koska L nilpotentti). Tällöin jono*

$$(v, Lv, L^2v, \ldots, L^{m-1}v)$$

on vapaa. Sen virittämää m-ulotteista V:n aliavaruutta $K[X](L)v$ sanotaan v:n määrämäksi sykliseksi aliavaruudeksi.

Todistus. Huomaa, että $L^n v = 0$ kaikilla $n \geq m$.
Olkoon

$$a_0 v + a_1 L(v) + \ldots + a_{m-1}L^{m-1}v = 0.$$

Jos tämä esitys on epätriviaali, valitaan pienin $k \leq m-1$ jolla $a_k \neq 0$ ja jaetaan yhtälö sillä. Saadaan esitys

$$L^k(v) + b_{k+1}L^{k+1}v + \ldots + b_{m-1}L^{m-1}v = 0.$$

Soveltamalla yhtälön molempiin puoliin kuvausta L^{m-1+k} saadaan $L^{m-1}v = 0$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Näin ollen jokainen nollan esitys on triviaali, joten kyseinen jono on vapaa.

Tarkastellaan V:n osajoukkoa

$$K[X](L)v = \{p(L)v \mid p \in K[X]\}.$$

Helposti nähdään, että tämä on V:n aliavaruus ja sisältää kaikki jonon $(v, Lv, L^2v, \dots, L^{m-1}v)$ alkiot. Näin ollen se sisältää myös niiden virittämän aliavaruuden.
Kääntäen olkoon

$$p = c_0 + c_1X + \dots + c_{m-1}X^{m-1} + c_mX^m + \dots + c_nX^n$$

polynomialgebran $K[X]$ alkio. Tällöin

$$p(L) = c_0 + c_1L + \dots + c_{m-1}L^{m-1} + c_mL^m + \dots + c_nL^n,$$

joten

$$p(L)v = c_0v + c_1Lv + \dots + c_{m-1}L^{m-1}v,$$

sillä $L^kv = 0$ kaikilla $k \geq m$. Näin ollen jokainen aliavaruuden $K[X](L)v$ alkio voidaan esittää jonon $(v, Lv, L^2v, \dots, L^{m-1}v)$ alkioiden lineaarisena kombinaationa. Olemme näyttäneet, että

$$K[X](L)v = \mathrm{Span}(v, Lv, L^2v, \dots, L^{m-1}v).$$

□

Olkoon $L\colon V \to V$ nilpotentti operaattori, jonka aste m on sama kuin avaruuden dimension $\dim V = n$. Asteen määritelmän nojalla löytyy $v \in V$ jolle $L^{n-1}v \neq 0$. Tällöin edellisen lemman nojalla $(v, Lv, L^2v, \dots, L^{n-1}v)$ on V:n vapaa osajoukko, jossa $n = \dim V$ alkiota, eli sen täytyy olla V:n *kanta*. Tällaisella operaattorilla on siis niin sanottu *syklinen kanta*, eli kanta $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, jolle $L(e_i) = e_{i-1}$, missä $e_0 = 0$.
Edellä konstruoitu kanta $(v, Lv, L^2v, \dots, L^{n-1}v)$ ei ole syklinen tässä mielessä, mutta siitä tulee syklinen, jos sen alkiot kirjoitetaan käänteisessä järjestyksessä eli jonona $(L^{n-1}v, L^{n-2}v, \dots, L^2v, Lv, v)$.
Tällaisen syklisen kannan suhteen L:n matriisi A on esimerkki niin sanotusta *Jordanin solusta*,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 3.35. *Olkoon K kunta, $\lambda \in K$ ja $n \geq 1$. n-kokoinen Jordanin λ-solu $N(\lambda, n)$ on $n \times n$-matriisi*

$$N(\lambda, n = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Jordanin solu $N(\lambda, n)$ on siis sellainen matriisi $A = (a_{ij})$ jolle $a_{ii} = \lambda$ kaikilla $i = 1, \dots, n$, $a_{i+1,i} = 1$ kaikilla $i = 1, \dots, n-1$ ja muut alkiot nolleja.

Olemme näyttäneet, että nilpotentti operaattori, jonka aste on sama kuin avaruuden dimensio n, voidaan esittää Jordanin soluna $N(0, n)$ (sopivassa syklisessa kannassa).
Jos nilpotentin operaattorin L aste on aidosti pienempi kuin $n = \dim V$, niin asia monimutkaistuu. Edellisen lemman nojalla voidaan valita jokin syklinen vapaa osajono $(v, Lv, L^2v, \dots, L^{m-1}v)$. Tällaisen virittämää aliavaruutta sanotaan sykliseksi aliavaruudeksi. Luonnolliseksi nousee kysymys siitä, voidaanko V jakaa suoraksi summaksi. Osoittautuu, että vastaus on aina myönteinen.

Propositio 3.36. *Olkoon $L\colon V \to V$ nilpotentti operaattori. Tällöin on olemassa $v_1, \dots, v_k \in V$ siten, että V on suora summa*

$$\oplus_{i=1}^k V_i,$$

miss V_i on v_i:han liittyvä syklinen aliavaruus

$$V_i = K[X](L)(v_i), i = 1, \dots, k$$

Todistus. Osoitetaan väite induktiolla $\dim V = n$:n suhteen. Jos $n = 1$, niin väite on selvä.
Koska L on nilpotentti, se ei voi olla surjektio. Nimittäin, jos se olisi surjektio, niin se olisi dimensiosyistä isomorfismi, joten myös jokainen sen potenssi L^m olisi isomorfismi, erityisesti ei olisi voinut olla nollakuvaus.
Erityisesti LV on V aito aliavaruus, joten voimme valita $n-1$-ulotteinen Vn aliavaruus U siten, että $LV \subset U$. Erityisesti $LU \subset U$, joten voimme soveltaa induktio-oletus avaruuden U nilpotenttiin operaattoriin $L|U$. On siis olemassa $v_1, \dots, v_k \in U$ siten, että

$$U = \oplus_{i=1}^k U_i, \tag{3.37}$$

missä

$$U_i = K[X](L) = \mathrm{Span}\{v_i, Lv_i, \ldots, L^{m_i-1}v_i\},$$

jokaisella $i = 1, \ldots, k$. Tässä m_i on pienin luonnollinen luku jolle $L^{m_i}v_i = 0$. Voimme olettaa, että

$$m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_k. \tag{3.38}$$

Koska U on $n-1$-ulotteinen, on olemassa $u \in V$, siten, että $U \oplus \mathrm{Span}(u) = V$. Toisaalta $LV \subset U$, joten

$$L(u) = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i + L(w)$$

jollakin $w \in U$ ja $a_1, \ldots, a_k \in K$. Tämä johtuu siitä, että U on suora summa (3.37), missä jokaisella yhteenlaskettavalla on kantana $\{v_i, Lv_i, \ldots, L^{m_i-1}v_i\}$. Nyt

$$L(u-w) = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i,$$

joten jos korvataan u alkiolla $v = u - w$, saadaan esitys $V = U \oplus \mathrm{Span}(v)$, missä

$$L(v) = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i.$$

Nyt, jos kaikki kertoimet $a_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, niin $L(v) = 0$, joten 1-ulotteinen aliavaruus $\mathrm{Span}(v)$ on syklinen. Koska $V = U \oplus \mathrm{Span}(v)$, missä U on suora summa syklisistä aliavaruuksista, väite on todistettu tässä tapauksessa.
Toinen tapaus on se, että jokin $a_i \neq 0$. Valitaan pienin sellainen indeksi j jolla $a_j \neq 0$. Tällöin

$$L(v) = a_j v_j + \sum_{i=j+1}^{n} a_i v_i.$$

Jakamalla tämä yhtälö a_j:llä saadaan yhtälö

$$L(e) = v_j + \sum_{i=j+1}^{n} b_i v_i = v_j + f,$$

missä $e = v/a_j$, $b_i = a_i/a_j$ ja $f = \sum_{i=j+1}^{n} b_i v_i$. Huomaa, että edelleenkin $V = U \oplus \mathrm{Span}(e)$. Koska f on summa alkioista syklisista alaiavruuksista V_i, missä $i \geq j$, tavastamme järjestä indeksit i (kts. 3.38) seuraa, että $L^{m_j}(f) = 0$, joten myös $L^{m_j}(v_k+f) = 0$. Toisaalta $L^{m_j-1}(v_j+f) = L^{m_j-1}(v_j)+L^{m_j-1}(f)$, mistä seuraa, koska $L^{m_j-1}(v_j) \neq 0$ ja summa $\oplus_{i=1}^k U_i$ on suora, että $L^{m_j-1}(v_j+f) \neq 0$. Näin ollen, jos korvataan v_j vektorilla $v_j' = v_j + f$, niin sen virittämä syklinen aliavaruus on samanulotteinen, kuin v_j:n virittämä, eli

$$V_j' = K[X]L(v_j') = \mathrm{Span}(v_j', Lv_j', \ldots, L^{m_j-1}(v_j')).$$

Tätä käytämällä nähdään helposti, että aliavaruuksien $\oplus_{i\neq j}V_i$ ja V_j' summa on suora, ja sen arvo on U. Korvataan siis v_j uudella virittäjällä v_j'. Tätä ei muuta alkuasetelmissa mitään, mutta nyt $L(e) = v_j'$, joten e:n virittämä syklinen aliavaruus $K[X]L(e)$ on syklisen aliavaruuden V_j' laajennus, jonka dimensio on V_j':n dimensio plus yksi. Näin ollen aliavaruuksien $\oplus_{i\neq j}V_i$ ja $K[X]L(e)$ summa on suora ja on arvoltaan koko avaruus U. Tämä on etsitty hajotelma. $\square$

Olkoon $L\colon V \to V$ nilpotentti operaattori. Olemme näyttäneet, että tällöin on olemassa $e_1, \ldots, e_k \in V$, siten, että niiden virittämät sykliset aliavaruudet $V_i = K[X]L(e_i)$ muodostavat suoran summan, joka on arvoltaan koko avaruus V. Jokainen aliavaruus V_i on triviaalisti L-invariantti ja L:n rajoittuma siihen voidaan kannassa $(L^{m_i-1}e, \ldots, Le, e)$ esittää Jordanin 0-soluna. Näin ollen L voidaan esittää matriisina

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_k \end{bmatrix},$$

missä $A_i = N(0, m_i)$ on Jordanin 0-solu. Tämä on erikoistapaus niin sanotusta *Jordanin normaalista muodosta.*

Määritelmä 3.39. *Matriisi A on Jordanin normaalissa muodossa jos se on "suora summa" Jordanin soluista, eli muotoa*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_k \end{bmatrix},$$

missä $A_i = N(\lambda_i, m_i)$ on Jordanin λ_i-solu, $\lambda_i \in K$, $m_i \geq 1, k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, k$. Merkitään se jonona $(N(\lambda_1, m_1), N(\lambda_2, m_2), \ldots, N(\lambda_k, m_k))$

Tutkitaan voidaanko operaattori $L\colon V \to V$ esittää jossakin kannassa Jordanin normaalissa muodossa. Osoittautuu, että tämä on mahdollista jos ja vain jos L:n karakterstinen polynomi on jaettavissa ensimmäisen asteen tekijöihin. Lisäksi tällöin operaattorin Jordanin normaali muoto on yksikäsitteinen solujen permutaatiota varten.

Lasketaan Jordanin normaalissa muodossa olevan matriisin A karakteristinen polynomi. Jordanin $(m \times m)$-kokoinen λ-solu $N(\lambda, m)$ on yläkolmiomatriisi, jonka kaikki diagonaalialkiot ovat λ joten sama pätee matriisille $XI - N(\lambda, n)$, jonka determinaantti (eli solun karakteristinen polynomi) on $(X - \lambda)^m$. Koska A on "suora summa" tällaisista soluista, sen karakteristinen polynomi on

$$\chi_A = (X - \lambda_1)^{m_1}(X - \lambda_2)^{m_2} \dots (X - \lambda)^{m_k},$$

erityisesti jaettavissa ensimmäisen asteen tekijöihin. Olemme osoittaneet välttämättömyys-osuuden seuraavasta klassisesta tuloksesta.

Lause 3.40. Jordanin Lause.
Olkoon $L \colon V \to V$ lineaarinen operaattori, missä V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus, K kunta. Tällöin L voidaan esittää jossakin kannassa Jordanin normaalissa muodossa eli matriisina $(N(\lambda_1, m_1), N(\lambda_2, m_2), \dots, N(\lambda_k, m_k))$ jos ja vain jos L:n karaktterinen polynomi on jaettavissa ensimmäisen asteen tekijöihin. Jos tällainen esitys on olemassa, niin se on yksikäsitteinen siinä esiintyvien Jordanin solujen permutaatiota varten.

Erityisesti, jos K on algebrallisesti suljettu kunta (esim. $\mathbb{C}$), niin jokainen äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden operaattori voidaan esittää Jordanin normaalissa muodossa, vieläkin olennaisesti yksikäsitteisellä tavalla.

Jordanin lauseen toditus on pitkä ja vaikeaa joten esitämme se aputulosten kautta.

Olkoon V K-vektoriavaruus ja $\lambda \in K$. Olkoon $L \colon V \to V$ operaattori. Määritelemme λ:n *juuriavaruuden* kaavalla

$$V^\lambda = \{x \in V \mid (L - \lambda \operatorname{id})^k(x) = 0 \text{ jollakin } k \in \mathbb{N}\}.$$

Juuriavaruus on jossakin mielessä ominaisarvoavaruuden yleistys.

Teemme ensin juuriavaruuksista muutaman havainnon.

Lemma 3.41. *Olkoot V K-vektoriavaruus, $\lambda \in K$ ja $L \colon V \to V$ operaattori. Tällöin*

1. *V^λ on aliavaruus,*

2. *V^λ on invariantti L:n suhteen,*

3. *Operaattorin $L - \lambda\,\mathrm{id}$ rajoittuma aliavaruuteen V^λ on hyvinmääritelty V^λ:n nilpotentti operaattori. Erityisesti $(L - \lambda_i\,\mathrm{id})^n v = 0$ kaikilla $v \in V^{\lambda_i}$.*

4. *$V^\lambda \neq \{0\}$ jos ja vain jos λ on L:n ominaisarvo.*

5. *L:n rajoittuma aliavaruuteen V^{λ_i} voidaan esittää Jordanin normaalissa muodossa, jossa kaikki solut λ-soluja.*

Todistus. 1)-4): Harjoitustehtävä.
Kohdan 2) nojalla $L - \lambda\,\mathrm{id}$ on aliavaruuden V^λ operaattorina nilpotentti. Propositiosta 3.36 seuraa (kts. kappale tämän proposition jälkeen), että $L - \lambda\,\mathrm{id}$ on esitettävissä V^λ:n yli Jordanin normaalissa muodossa A, jossa esiintyy vain 0-soluja. Mutta tällöin $L = (L - \lambda\,\mathrm{id}) + \lambda\,\mathrm{id}$ on esitettävissä samassa kannassa matriisina $A + \lambda\,\mathrm{id}$, joka on Jordanin normaalissa muodossa, jossa kaikki solut λ-soluja. □

Propositio 3.42. *Olkoon $L\colon V \to V$ K-vektoriavaruuden operaattori. Olkoot $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sen kaikki (erilaiset) ominaisarvot. Tällöin seuraavat väitteet pätevät.*

1. *Juurialiavaruuksien $V^{\lambda_1}, V^{\lambda_2}, \ldots, V^{\lambda_k}$ summa on suora.*

2. *Operaattorin $(L - \lambda_i\,\mathrm{id})$ rajoittuma aliavaruuteen V^{λ_i} on nilpotentti operaattori jokaisella $i = 1, \ldots, k$.*

3. *Jokaisella $j = 1, \ldots, k$ aliavaruus*
$$\oplus_{i \neq j} V^{\lambda_i}$$
on L-invariantti ja operaattorin $L - \lambda_j\,\mathrm{id}$ rajoittuma tähän avaruuteen on isomorfismi.

4. *Olkoon m_i juuren λ_i kertaluku χ_L:n juurena, tällöin $\dim V^{\lambda_i} = m_i$,*

5. *L:n rajoittuma avaruuteen*
$$V' = \oplus_{i=1}^{k} V^{\lambda_i}$$
voidaan esittää Jordanin normaalissa muodossa.

Todistus. Polynomit $p_1, \ldots, p_l \in K[X]$ sanotaan keskenään jaottomiksi jos ainoat niiden yhteiset tekijät ovat vakiopolynomit. Tällöin (harjoitustehtävä) on olemassa polynomit $q_1, \ldots, q_l$ siten, että

$$p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_lq_l = 1.$$

Väite 2) seuraa edellisestä lemmasta, kohta 3). Osoitetaan väite 3). Edellisen lemman nojalla V^{λ_i} on L-invariantti jokaisella $i = 1, \ldots, k$, joten myös suora summa $\oplus_{i \neq j} V^{\lambda_i}$ on L-invariantti. Osoitetaan, että $L - \lambda_j \,\mathrm{id}$:n rajoittuma tähän avaruuteen on isomorfismi. Polynomit $p_1 = (X - \lambda_j \,\mathrm{id})$ ja $p_2 = \prod_{i \neq j}(X - \lambda_i \,\mathrm{id})^n$ ovat keskenään jaottomat (mieti miksi), joten todistuksen alussa tehdyn havainnon nojalla on olemassa polynomit $q, g \in K[X]$ siten, että

$$1 = qp_1 + gp_2.$$

Oletetaan, että $v \in \oplus_{i \neq j} V^{\lambda_i}$ ja $(L - \lambda \,\mathrm{id})v = 0$. Tällöin $p_2(L)v = 0$, mutta myös $p_1(L)v = 0$. Näin ollen

$$v = \mathrm{id}(v) = 1(L)v = qp_1(L)v + gp_2(L)v = 0.$$

Väite 3) on osoitettu. Väite 1) nyt seuraa väitteistä 2) ja 3). Nimittäin, jos $v \in V^{\lambda_j} \cap \oplus_{i \neq j} V^{\lambda_i}$, niin toisaalta $(L - \lambda_j \,\mathrm{id})^n(v) = 0$, mutta $L - \lambda_j \,\mathrm{id}$:n rajoittuma aliavaruuteen $V^{\lambda_j} \cap \oplus_{i \neq j} V^{\lambda_i}$ on edellä todistetun nojalla injektio, joten myös $(L - \lambda_j \,\mathrm{id})^n$ on injektio. Näin ollen $v = 0$ ja väite 1) on todistettu. Viimeinen väite seuraa nyt todistetuista ja edellisestä lemmasta.

Väitteen 4) tarkka todistus sivutetaan. Kun χ_L on jaettavissa ensimmäisen asteen tekijöihin, väite 4) on helppo seuraus tästä ja seuraavasta propositiosta. Yleisesti se voidaan todistaa upottamalla kunta K algebrallisesti suljettuun kuntaan ja käyttämällä sitä, että väite pätee aina sellaisessa kunnassa. Yksityiskohtainen tarkastelu jätetään lukijalle.

Väite 5) seuraa edellisestä tuloksesta ja väitteestä 1).

□

Propositio 3.43. *Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarinen operaattori, missä V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus, K kunta. Oletetaan, että L:n karakteristinen polynomi on jaettavissa ensimmäisen asteen tekijöihin.*
Tällöin L voidaan esittää Jordanin normaalissa muodossa.

Todistus. Edellisen proposition nojalla riittää osoittaa, että juurialiavaruuksien (suora) summa

$$\oplus_{i=1}^{k} V^{\lambda_i}$$

on koko avaruus V. Olkoon

$$\chi_L = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_k)^{m_k}.$$

Jokaisella $i = 1, \dots, k$ määritellään

$$P_j = \prod_{i \neq j} (X - \lambda_i)^{m_i} \in K[X].$$

Tämä on siis polynomi, joka saadaan kertomalla keskenään kaikki tekijät $(X - \lambda_i)^{m_i}$, paitsi j'nnes. Polynomit $P_1, \dots, P_k \in K[X]$, $i = 1, \dots, k$, ovat keskenään jaottomat (miksi?). Näin ollen (kts. edellisen proposition todistusta) on olemassa polynomit $Q_1, \dots, Q_k \in K[X]$ siten, että

$$P_1Q_1 + P_2Q_2 + \dots + P_kQ_k = 1.$$

Merkitään $W_j = P_j(L)V$, $j = 1, \dots, k$. Tällöin jokaisella $w \in W_j$ pätee

$$(L - \lambda_j \, \mathrm{id})^{m_j} w = (L - \lambda_j \, \mathrm{id})^{m_j} P_j(L)v = \chi_L(L)v = 0,$$

missä $v \in V$ jokin alkio. Tässä olemme soveltaneet Cayley-Hamiltonin Lausetta.
Olemme näyttäneet, että $W_j \subset V^{\lambda_j}$. Osoitetaan, että avaruuksien W_j summa on koko avaruus V. Tällöin erityisesti aliavaruuksien V^{λ_j} summa on koko avaruus V.
Nimittäin jokaisella $v \in V$

$$v = \mathrm{id}(v) = P_1(L)Q_1(L)v + P_2(L)Q_2(L) + \dots + P_k(L)Q_k(L),$$

missä $P_i(L)Q_i(L)v \in P_i(L)(V) = W_i$. $\square$

Jordanin lauseen olemassaolo-puoli on nyt todistettu. Jäljellä on yksikäsitteisyys.
Olkoon $L \colon V \to V$ sellainen operaattori, joka voidaan esittää Jordanin normaalissa muodossa olevana matriisina A. Olkoot $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ erilaiset K:n alkiot, joilla A sisältää λ_i-soluja. Me tiedämme jo, että nämä luvut ovat täsmälleen L:n ominaisarvot, joten L määrää ne yksikäsitteisesti. Jokaisella $i = 1, \dots, k$ matriisi A voi sisältää yhden tai enemmän λ_i-soluja, olkoot $N(\lambda_i, m_1), N(\lambda_i, m_2), \dots, N(\lambda_i, m_s)$ kaikki λ_i-solut jotka esiintyvät A:ssä. Meidän pitää osoittaa, että samankokoisten eli $(m \times m)$-kokoisten λ_i-solujen määrä riippuu vain L:stä jokaisella $m \in \mathbb{N}$.

Jokaisella $i = 1, \dots, k$ A:n jokin λ_i-solu $N(\lambda_i, m_j)$ vastaa operaattorin $(L - \lambda_i \,\mathrm{id})$ "syklistä vapaata osajoukkoa" $\mathbf{e^i_j} = (e_j, (L - \lambda_i \,\mathrm{id})e_j, \dots, (L - \lambda_i \,\mathrm{id})^{m_j - 1}e_j)$. Tämän virittämässä aliavaruudessa W^i_j operaattori $L - \lambda_i \,\mathrm{id}$ on nilpotentti, joten W^i_j on juurialiavaruuden V^{λ_i} aliavaruus. Eri soluja vastaavat avaruudet W^i_j muodostavat suoran summan W^i, joka on täten V^{λ_i}:n aliavaruus. Toisaalta aliavaruuksien W^{λ_i} summa on koko avaruus V, joten täytyy olla

$$W^{\lambda_i} = V^{\lambda_i}$$

jokaisela $i = 1, \dots, n$. Näin ollen

$$V^j = \oplus_{1 \le j \le s} \operatorname{Span}(e_j, (L - \lambda_i \,\mathrm{id})e_j, \dots, (L - \lambda_i \,\mathrm{id})^{m_j - 1}e_j),$$

missä m_j käy läpi kaikki A:n λ_i-solujen koot (mahdollisesti samat!). Voimme olettaa, että $m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_s$.
Strategiana on laskea jokaisella luonnollisella luvulla $t \in \mathbb{N}$ operaattorin $(L - \lambda_i)^t \colon V \to V$ kuvajoukon dimensiota, joka merkitään r_t:llä. Nämähän tietenkin riippuvat vain L:stä, joten jos onnistumme kytkemään solujen lukumäärään näihin invariantteihin, saamme todistettua myös jälkimäisten invarianttisuutta.

Proposition 3.42 nojalla jokainen aliavaruus V^{λ_j} on invariantti operaattorin $L - \lambda_i$, joten myös operaattorin $(L - \lambda_i)^t$:n suhteen, jokaisella $t \in \mathbb{N}$. Lisäksi se on isomorfismi rajotettuna aliavaruuksiin V^{λ_j}, $j \neq i$. Toisaalta, jos $\mathbf{e^i_j} = (e_j, (L - \lambda_i \,\mathrm{id})e_j, \dots, (L - \lambda_i \,\mathrm{id})^{m_j - 1}e_j)$ on eräs syklinen vapaa jono, joka vastaa erästä λ_i-solua, niin $(L - \lambda_i)^t$ kuvaa sen virittämän avaruuden avaruudeksi, jonka kanta on $((L - \lambda_i)^t e_j, (L - \lambda_i)^{t+1} e_j, (L - \lambda_i \,\mathrm{id})^{m_j - 1}e_j)$. Tämähän on vapaan osajonon $e_j, (L - \lambda_i \,\mathrm{id})e_j, \dots, (L - \lambda_i \,\mathrm{id})^{m_j - 1}e_j)$ osajono, joten myös vapaa. Jos solun koko $m_j \le t$, niin tämän jonon pituus on 0, muuten $m_j - t$. Näin ollen, jos V':llä merkitään suoraa summaa

$$V' = \oplus_{i \neq j} V^{\lambda_i},$$

niin

$$r_t = \sum_{m_j > t} (m_j - t) + \dim V'.$$

Tästä seuraa, että

$$r_t - r_{t+1} = \sum_{m_j > t} (m_j - t) - \sum_{m_j > t+1} (m_j - t - 1) =$$

$$= \sum_{m_j > t} (m_j - t) - \sum_{m_j > t+1} (m_j - t) + \sum_{m_j > t+1} 1 =$$

$$\sum_{m_j=t+1} 1 + \sum_{m_j>t+1} 1 = \sum_{m_j\geq t+1} 1 = n_{t+1} + n_{t+2} + \ldots,$$

missä n_k:llä merkitään k-kokoisten λ_i-solujen lukumäärää. Näin ollen

$$n_t = r_{t-1} - r_t - (r_t - r_{t+1}) = r_{t-1} - 2r_t + r_{t+1}.$$

Tässä $r_0 = \dim V$. Koska suuret oikealla puoleella riippuvat vain L:stä, ei tavasta esittää se Jordanin matriisina, sama pätee vasemalle puoleelle. Yksikäsitteisyys on todistettu.

Jordanin lauseen avulla voidaan johtaa kuvauksen diagonalisaation hyödyllinen karakterisaatio.
Nimittäin, olkoon

$$\chi_L = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

operaattorin $L\colon V \to V$ karakteristinen polynomi, jolloin L voidaan esittää Jordanin matriisina A. Jos $n^i_1, \ldots, n^i_{s_i}$ ovat erilaisten λ_i-solujen koot, niin tietysti $n^i_1 + \ldots + n^i_{s_i} = m_i$. Minimaalinen polynomi joka nollaa n-kokoisen λ-solun on polynomi $(X - \lambda)^n$, joten L:n minimipolynomi on

$$m_L = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m'_i},$$

missä $m'_i = \max\{n^i_1, n^i_2, \ldots, n^i_{s_i}\}$.
Jokainen diagonaalinen matriisi on Jordanin normaalissa muodossa, jossa jokaisen solun koko on 1 ja päinvastoin. Tästä ja edellisestä saadaan seuraava mielenkiintoinen havainto. Tarkemmin sanottuna odistuksessa tarvitaan yleisesti myös se fakta, että karakteristisella ja minimipolynomilla on samat jaottomat tekijät, jonka perustelu sivutettiin.

Lemma 3.44. *Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori. Tällöin se on diagonalisoituva jos ja vain jos sen minimipolynomi on muotoa*

$$m_L = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i),$$

missä λ_i kaikki eri kunnan luvut. Toisin sanoen minimipolynomi on jaettavissa ensimmäisen asteen tekijöihin, joista mikään ei toistu.

Tulos on hyödyllinen, sillä usein minimipolynomin voi laskea suoraan.