1. Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori. Oletetaan, että jokainen $v \in V$ on L:n ominaisvektori. Osoita, että $L = r\,\mathrm{id}$ jollakin $r \in K$.

2. Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Olkoon $W \subset V$ aliavaruus siten, että W on L-invariantti jokaisella $L \in L(V)$. Osoita, että $W = 0$ tai $W = V$.

3. Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori, missä V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Oletetaan, että jokainen V:n aliavaruus W, jolle $\dim W = \dim V - 1$ on L-invariantti. Osoita, että $L = r\,\mathrm{id}$ jollakin $r \in K$.

4. Olkoon $L\colon \mathbb{R}^{(N)} \to \mathbb{R}^{(N)}$ ”siirtooperaattori”

$$L(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots).$$

Tutki mitä ominaisarvoja L:llä on ja mitkä ovat vastaavat ominaisaliavaruudet.

5. Olkoot $L, L'\colon V \to V$ lineaariset operaattorit, äärellisulotteisessä vektoriavaruudessa V. Osoita, että $\mathrm{tr}(LL' - L'L) = 0$. Osoita tämän avulla, että *komutaattori* $LL' - L'L$ ei voi koskaan olla identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon V \to V$.

6. Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori ja $\dim V = k$. Osoita, että V:llä on korkeintaan $k + 1$ ominaisarvoa. Anna esimerkki, jossa ominaisarvoja tasan $k + 1$ kappaletta.

7. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M(2 \times 2; \mathbb{R}).$$

a) Osoita, että A:llä on ominaisarvot

$$\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ja esitä A muodossa

$$A = BDB^{-1},$$

missä D on diagonaalinen matriisi

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix}.$$

b) Osoita, että kaikilla $m \in \mathbb{N}$ toisaalta pätee $A^m = BD^mB^{-1}$ mutta toisaalta

$$A^m = \begin{bmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{bmatrix},$$

missä f_n on n's Fibonaccin luku.
c) Johda edellisen avulla kaavaa Fibonaccin luvuille

$$f_m = \frac{\lambda_+^m - \lambda_-^m}{\sqrt{5}}.$$

8. Olkoon K kunta, $a_1, \ldots, a_n$ kunnan K alkiot. Tarkastellaan $K[X]$- kertoiminen $(n+1) \times (n+1)$-matriisi

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & X & X^2 & \ldots & X^n \end{bmatrix}.$$

a) Osoita, että $p = \det \Delta_n$ on tasan n-asteinen polynomi ja $a_1, \ldots, a_n$ ovat sen juuret.
b) Osoita (esim. induktiolla), että

$$p(a_{n+1}) = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (a_j - a_i)$$

jokaisella $a_{n+1} \in K$.

9. Olkoon K kunta jossa on vähintään $n+1$ (eri) alkiota $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Osoita edellisen tehtävän avulla, että jos $p, q \in K[X]$ ovat polynomit, joiden asteet korkeintaan n ja $p(x) = q(x)$ kaikilla $x \in K$, niin $p = q$ $K[X]$:ssä.
Totea, että jos K on ääretön kunta, niin polynomit $p, q \in K[X]$ ovat samat jos ja vain jos ne määrittelevät samat polynomifunktiot $p, q \colon K \to K$ (eli jos ja vain jos $p(x) = q(x)$ kaikilla $x \in K$).

10. Olkoon K äärellinen kunta jossa on tasan $n+1$ alkiota $a_1,\ sldots, a_n, a_{n+1}$. Olkoon $p \in K[X]$ polynomi

$$\prod_{i=1}^{n+1} (X - a_i).$$

Merkitään $K[x]$:llä kaikkien polynomifunktioiden $p \colon K \to K$ muodostamaa rengasta. Osoita, että $K[x] \cong K[X](p)$, missä (p) on p:n virittämä ideaali.

11. Olkoon n pariton. Osoita, että mikään $J \in M(n \times n; \mathbb{R})$ ei toteuta yhtälöä

$$J^2 + 1 = 0.$$

12. Olkoon n parillinen. Anna esimerkki matriisista $J \in M(n \times n; \mathbb{R})$ jolle

$$J^2 + 1 = 0.$$

(Vihje: rittää tarkastella tapaus $n = 2$, miksi? Mieti kiertoja).

13. Olkoon $V = (V, +, \cdot)$ äärellisulotteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Olkoon $J \colon V \to V$ lineaarinen operaattori, jolle pätee $J^2 = -1$. Määritellään V:ssä $\mathbb{C}$-skalaarikertolasku $\odot \colon C \times V \to V$ kaavalla

$$z \cdot v = xv + yJv,$$

missä $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
a) Osoita, että $(V, +, \odot)$ on äärellisulotteinen $\mathbb{C}$-vektoriavaruus.
b) Olkoon $e_1, \ldots, e_n$ V:n kanta $\mathbb{C}$-vektoriavaruutena. Osoita, että $(e_1, ie_1, e_2, ie_2, \ldots, e_n, ie_n)$ on V:n kanta $\mathbb{R}$-vektoriavaruutena, joten

$$\dim_{\mathbb{C}} V = \frac{\dim_{\mathbb{R}} V}{2}.$$

c) Olkoon $A \colon V \to V$ $\mathbb{R}$-lineaarinen operaattori. Osoita, että se on myös $\mathbb{C}$-lineaarinen jos ja vain jos $AJ = JA$.

14. Olkoon $A \in M(2 \times 2; K)$. Osoita, että

$$A^2 - (\operatorname{tr} A)A + \det A = 0.$$

Matriisin jälki tr on sen diagonaalialkioiden summa.

15. Olkoon $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ matriisi jolla ei ole reaalisia ominaisarvoja. Olkoon $z = x + iy$ sen kompleksinen ominaisarvo. Osoita, että on olemassa matriisi $J \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ jolle $A = x \operatorname{id} + yJ$ ja $J^2 = -1$.

16. Olkoon $L \colon V \to V$ operaattori äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa. Oletetaan, että jollakin $p \in \mathbb{N}$ pätee $\operatorname{Im} L^p = \operatorname{Im} L^{p+1}$. Osoita, että

$$V = \operatorname{Ker} L^p \oplus \operatorname{Im} L^p.$$

(Vihje: osoita ensin, että jokainen $x \in V$ voidaan kirjoittaa muodossa $x = u + v$, missä $u \in \operatorname{Ker} L^p$ ja $y \in \operatorname{Im} L$. Iteroimalla tätä tulosta saadaan väite osoitettua).

17. Olkoon $K = \mathbb{Z}_2$ kahden alkion kunta. Tutki seuraavien $K[X]$:n polynomien jaollisuutta.
a) $X^2 + X + 1$,
b) $X^3 + 1$,
c) $X^4 + X^2 + 1$,
d) $X^4 + 1$.

18. Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori, missä V äärellisulotteinen.
a) Osoita, että L on kääntyvä jos ja vain jos sen minimipolynomin m_L vakiotermi on nollasta eroava.
b) Olkoon L kääntyvä. Osoita, että on olemassa polynomi $p \in K[X]$ siten, että $L^{-1} = p(L)$.

19. Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori, missä V äärellisulotteinen. Osoita, että L ei ole kääntyvä jos ja vain jos on olemassa nollasta eroava operaattori $L'\colon V \to V$ siten, että $LL' = L'L = 0$.

20. Olkoon K algebrallisesti suljettu ja $A \in M(n \times n; K)$. Osoita että matriisit A ja A^T ovat similaariset (vihje: Jordan).