1. Olkoon $(M, +)$ Abelin ryhmä. Oletetaan, että jokaisella $m \in M$ ja $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ on olemassa tasan yksi $x \in M$ jolle $nx = m$. Osoita tarkasti, että M:ssä voidaan määritellä yksikäsitteinen $\mathbb{Q}$-vektoriavaruuden struktuuri.

2. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus kahden vektoriavaruuden välillä. Osoita, että se on injektiivinen jos ja vain jos jokainen vapaa joukko A kuvautuu vapaalle joukolle $L(A)$ ja surjektio jos ja vain jos jokainen V:n virittäjäjoukko kuvautuu W:m virittäjäjoukolle.

3. Olkoot $f, g \in V^*$, missä V on n-ulotteinen K-vektoriavaruus. Oletetaan, että $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$. Osoita, että on olemassa skalaari $\lambda \in K$ siten, että $g = \lambda f$.

4. Olkoon M n-ulotteinen R-moduli. Oletetaan, että $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ on eräs duaalin M^* kanta. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen M:n kanta $(e_1, \ldots, e_n)$ siten, että $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ on sen duaali-kanta.

5. Olkoot N, P modulin M alimodulit. Osoita, että $N \cup P$ on alimoduli jos ja vain jos toinen alimoduleista N, P sisältyy kokonaan toiseen.

6. a) Olkoot N, N' R-modulin M alimodulit. Osoita, että modulit $N/(N \cap N')$ ja $(N + N')/N'$ ovat isomofisia.
   b) Oletetaan, että yllä $N' \subset N$. Osoita, että tekijämoduli N/N' voidaan ajatella tekijämodulin M/N' alimodulina luonnollisella tavalla ja
   $$(M/N')/(N/N') \cong M/N.$$

7. Olkoot W, U äärellisulotteisen vektoriavaruuden V aliavaruudet. Osoita, että
   $$\dim(W + U) = \dim W + \dim U - \dim(U \cap V).$$

8. Olkoon
   $$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0.$$
   lyhyt eksakti jono (kts Harj. 6/ teht. 1). Osoita, että jono
   $$0 \longrightarrow P^* \xrightarrow{g^*} M^* \xrightarrow{f^*} N^*.$$
   on eksakti. Anna esimerkkejä injektiivisestä lineaarisesta kuvauksesta $f\colon N \to M$ jolle $f^*\colon M^* \to N^*$ ei ole surjektiivinen.

9. Olkoon
$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0.$$
eksakti jono, joka halkeaa (kts. Harj. 6/teht. 3). Osoita, että jono
$$0 \longrightarrow P^* \xrightarrow{g^*} M^* \xrightarrow{f^*} N^* \longrightarrow 0.$$
on eksakti ja halkeaa.

10. Sanomme, että lineaarinen endomorfismi $L\colon M \to M$, missä M ja N modulit on *projektio* jos $L^2 = L$. Osoita seuraavat.
a) L on projektio jos ja vain jos $\mathrm{id} - L$ on projektio.
b) L on projektio jos ja vain jos $\mathrm{Im}\, L = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - L)$.
c) Jos L on projektio, niin $\mathrm{Im}\, L = \{x \in M \mid L(x) = x\}$.
d) Jos L on projektio, niin $\mathrm{Im}\, L$ ja $\mathrm{Ker}\, L$ muodostavat suoran summan ja
$$\mathrm{Im}\, L \oplus \mathrm{Ker}\, L = M.$$
e) L on projektio jos ja vain jos on olemassa M:n alimodulit N ja P siten, että se $M = N \oplus P$:ssä ja L on tähän hajotelmaan liittyvä projektiokuvaus $pr_1\colon M \to N$.
e) Jos $M = V$ on vektoriavaruus ja L on projektio, V:llä on kanta $\{\mathbf{e}\}$, jonka suhteen L:n matriisi on lohkomatriisi muotoa
$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. Olkoon M R-moduli ja olkoon $N_1, \ldots, N_n$ kokoelma sen alimoduleja. Oletetaan, että ne muodostavat suoran summan ja
$$\oplus_{i=1}^n N_i = M.$$
a) Jokaisella $i = 1, \ldots, n$ olkoon $p_i\colon M \to M$ lineaarinen projektio joka on identtinen kuvaus N_i:ssä ja nollakuvaus muaalla. Osoita, että
$$\sum_{i=1}^n p_i = \mathrm{id}$$
ja $p_i p_j = \delta_{ij} p_i$, $i, j = 1, \ldots, n$.
b) Olkoon kääntäen $p_1, \ldots, p_n\colon M \to M$ lineaariset endomorfismit joille pätee
$$\sum_{i=1}^n p_i = \mathrm{id}$$

ja $p_i p_j = \delta_{ij} p_i$, $i, j = 1, \ldots, n$. Osoita, että alimodulit $N_i = p_i(M)$ muodostavat suoran summan, jonka arvo on koko moduli M ja $p_i \colon M \to M$ on N_i:hen liittyvä projektio jokaisella $i = 1, \ldots, n$.

12. a) Olkoot R vaihdannainen ja epätriviaali rengas. Oletetaan, että ainoat sen ideaalit ovat triviaalit ideaalit $\{0\}$ ja R. Osoita, että R on kunta.
b) Osoita, että renkaassa $M_n = M(n \times n; R)$ ainoat ideaalit ovat $\{0\}$ ja M_n.

13. Olkoon $L \colon M(n \times n; K) \to M(n \times n; K)$, K kunta, rengashomomorfismi eli kuvaus, joka säilyttää myös matriisien kertolaskun,
$$L(AB) = L(A)L(B)$$
kaikilla $A, B \in M(n \times n; K)$ ja jolle lisäksi $L(I_n) = I_n$.
a) Osoita edellisen tehtävän avulla, että L on isomorfismi.
b) Jokaisella $i_1, \ldots, n$ olkoon p_i lineaarinen projektio $K^n \to K^n$, joka kuvaa standardikannan $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ jokaisen alkion alkioksi e_i. Olkoon E_i tämän kuvauksen matriisi standardikannan suhteen. Osoita, että $L(E_1), \ldots, L(E_n)$ (lineaarikuvauksina ajateltuna) toteuttuvat tehtävän (11) ehdot, joten määrävät aliavaruuksia $W_1, \ldots, W_n$, joiden suora summa on K^n. Päättele tästä, että $\dim W_i = 1$ eli on olemassa K^n:n kanta $(f_1, \ldots, f_n)$ siten, että $W_i = \mathrm{Span}(f_i)$.
c) Päättele, että on olemassa kääntyvä $(n \times n)$-matriisi C siten, että $L(X) = CXC^{-1}$.

14. Olkoon V vektoriavaruus, $A \subset V, B \subset V^*$ mielivaltaiset osajoukot. Määritellään *annihilaatorit*
$$A^0 = \{f \in V^* \mid f(a) = 0 \text{ kaikilla } a \in A\},$$
$$B_0 = \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ kaikilla } f \in B\}.$$
Osoita, että
a) A^0 on V^*:n aliavaruus ja B_0 on V:n aliavaruus.
b) Jos $A \subset A'$, niin $A'^0 \subset A^0$ ja jos $B \subset B'$, niin $B_0'' \subset B_0$.
c) Jos $W = \mathrm{Span}(A)$, $U = \mathrm{Span}(B)$, niin $W^0 = A^0$ ja $U^0 = B^0$.

15. Jatkoa edelliselle. Olkoon W äärellisulotteisen vektoriavaruuden V aliavaruus ja olkoon U V^* aliavaruus. Osoita, että
a) $\dim W + \dim W^0 = \dim V = \dim U + \dim U_0$,
b)$(W^0)_0 = W,\ (U_0)^0 = U$.

16. Olkoot M, N R-modulit. Osoita, että $(M \oplus N)^* \cong M^* \oplus N^*$.

17. Olkoon W vektoriavaruuden V aliavaruus ja W' jokin W:n komplementti. Osoita, että $(V/W)^* \cong W'^0$.

18. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus kahden äärellisulotteisen vektoriavaruuden välillä. Osoita, että on olemassa V:nn aliavaruus U siten, että $L|U\colon U \to W$ on injektio ja $L(V) = L(U)$.

19. Olkoot $L\colon U \to V, L'\colon V \to W$ lineaariset kuvaukset äärellisulotteisten vektoriavaruuksien välillä. Osoita, että tällöin

$$\dim \operatorname{Ker}(L' \circ L) \leq \dim \operatorname{Ker} L + \dim \ker L'.$$

20. Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus, $(a_1, \ldots, a_n)$ sidottu jono V:ssä ja $L_1, \ldots, L_n \in V^*$ mielivaltaiset. Määritellään matriisi $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$ ehdolla $a_{ij} = L_i(v_j)$. Osoita, että

$$\det A = 0.$$

21. Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus, $\dim V = n$. Olkoon $(a_1, \ldots, a_n)$ mielivaltainen jono V:ssä ja olkoon $L_1, \ldots, L_n$ jokin duaaliavaruuden V^* . Määritellään matriisi $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$ ehdolla $a_{ij} = L_i(v_j)$. Osoita, että jono $(a_1, \ldots, a_n)$ on sidottu jos ja vain jos $\det A = 0$.

22. Olkoon $A \in M(n \times n; R)$ matriisi joka kommutoi jokaisen $(n \times n)$-matriisin kanssa, eli $AB = BA$ kaikilla $B \in M(n \times n; R)$. Osoita, että $A = rI_n$ jollakin $r \in R$.

23. Olkoon M äärellisulotteinen moduli ja $L\colon M \to M$ lineaarinen kuvaus. Oletetaan, että L:llä on sama matriisi jokaisessa M:n kannassa. Osoita, että $L = r \operatorname{id}$ jollakin $r \in R$.