1. Olkoon $\cdot$ liitännäinen laskutoimitus joukossa X. Oletetaan, että
i) X:ssä on olemassa *vasemmanpuoleinen* neutraalialkio e eli sellainen $e \in X$ jolle $ex = x$ kaikilla $x \in X$ ja
ii) jokaisella $x \in X$ on olemassa $y \in X$ jolle $yx = e$. Osoita, että $(X, \cdot)$ on ryhmä.

2. Olkoon X joukko, jossa on laskutoimitus $\cdot$. Muotoa $ax = b$ tai $xa = b$ oleva yhtälö (missä $a, b \in X$ ja x tuntematon sanotaan *lineaariseksi.*
a) Olkoon X ryhmä. Osoita, että jokaisella lineaarisella yhtälöä on yksikäsitteinen ratkaisu.
b) Kääntäen olkoon X epätyhjä joukko, jossa on määritelty liitännäinen laskutoimitus $\cdot$. Oletetaan, että jokaisella X:n lineaarisella yhtälöllä on ainakin yksi ratkaisu joukossa X. Osoita, että $(X, \cdot)$ on itse asiassa ryhmä.

3. Olkoon $\cdot$ laskutoimitus joukossa X. Olkoon $x_1, \ldots, x_n$ mikä tahansa äärellinen *jono* X:n alkioita. Sanalla "jono" korostamme, että alkiot on varustettu indekseillä $1, \ldots, n$ eli laitettu järjestykseen. Määritelemme jonon tulon $x_1 x_2 \ldots x_n$ induktiolla siten, että kun $n = 2$ $x_1 x_2$ on sama kuin laskutoimituksen määritelemä alkioiden $x_1 x_2$ tulo ja $x_1 \ldots x_n x_{n+1}$ määritellään olevan $(x_1 \ldots x_n) \cdot x_{n+1}$. Toisin sanoen lasketaan kolmen ja enemmän alkion tulo vasemmalta oikealle yksi kerrallaan.
Olkoon $\cdot$ liitännäinen $n \geq 3$ ja $1 \leq s \leq n$. Osoita, että

$$(x_1 \ldots x_s) \cdot (x_{s+1} \ldots x_n) = x_1 \ldots x_n$$

kaikilla jonoilla $x_1, \ldots, x_n$.
Iteroimalla tämä tulos nähdään, että liitännäisen laskutoimituksen tapauksessa pitkissä tuloissa sulut voi asettaa "mihin vaan" ja lopputulos on aina sama.

4. Olkoon $\cdot$ vaihdannainen *ja liitännäinen* laskutoimitus. Olkoon $x_1, \ldots, x_n$ mielivaltainen äärellinen jono X:ssä ja olkoon $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ **bijektio**. Osoita, että

$$x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)} = x_1 \ldots x_n.$$

Toisin sanoen tuloa laskittaessa alkioiden järjestyksellä ei ole merkitystä.
b) Yllättäen, tämä tulos vaatii liitännäisyyden, vaihdannaisuus yksin

ei riitä. Osoita tämä antamalla esimerkki vaihdannaisesta laskutoimituksessa, jossa a)-kohdan tulos ei päde jo arvolla $n = 3$.

5. Täydennän kompleksilukujen konstruuktio sektiossa 1.1. osoitamalla tarkasti määritelmistä lähtien, että se on kunta.

6. Osoita (induktiolla) potenssikaavat
$$x^n \cdot x^m = x^{n+m},$$
$$(x^n)^m = x^{nm},$$
missä $x \in X$, X:n laskutoimitus liitännäinen ja n, m sellaiset, että kaavoissa esiintyvät symbolit kaikki hyvinmääriteltyjä.

7. Olkoon A Abelin ryhmä ja olkoon $Q = \{f\colon A \to A \mid f \text{ on ryhmähomomofismi }\}$ sen homomorfismien muodostama joukko. Tässä joukossa on määritely yhteenlasku + pisteittäin kaavalla
$$(f + f')(x) = f(x) + f'(x).$$
$(Q, +)$ on Abelin ryhmä (ei tarvitse todistaa).
Oletetaan, että $\alpha\colon (A, +) \to (Q, +)$ on jokin ryhmähomomorfismi. Määritellään A:ssä kertolasku $\cdot$ kaavalla
$$a \cdot b = \alpha(a)(b).$$
Osoita, että $(A, +, \cdot)$ toteuttaa kaikki renkaan ehdot, paitsi, että kertolasku ei välttämättä ole liitännäinen.

8. Olkoon $(M, +)$ Abelin ryhmä ja Q kuten edellisessä tehtävässä sen ryhmähomomorfismien joukko. Q:ssä on määritely yhteenlasku (kts. edellinen tehtävä) ja kertolasku $\circ$ (kuvausten yhdistäminen). $(Q, +, \circ)$ on rengas (ei tarvitse osoittaa).
Oletetaan, että R on rengas ja olkoon $\alpha\colon R \to Q$ jokin kuvaus. Määritellään M:ssä R-skalaarikertolasku kaavalla
$$r \cdot m = \alpha(r)(m).$$
Osoita, että $(M, +, \cdot)$ on R-moduli jos ja vain jos α on rengashomomorfismi.

9. Tarkastellaan Abelin ryhmä $(\mathbb{Z}, +)$. Olkoon Q sen homomorfismien muodostama rengas (laskutoimituksina pisteittäinen yhteenlasku ja kuvausten yhdistäminen kertolaskuna).
Osoita, että $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}$, missä $\mathbb{Z}$ on kokonaislukujen rengas.

10. Olkoon X joukko. Sen potenssijoukossa

$$\mathcal{P}(X) = \{A \subset X\}$$

on määritelty kaksi laskutoimitusta - kahden joukon unioni $\cup$ ja kahden joukon leikkaus $\cap$. Tutki mitä (ykkösillisen) renkaan aksioomeista toteuttaa kolmikko a) $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$,
b) $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ (yhteenlasku ja kertolasku toisinpäin a)-kohdan verrattuna).

11. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritellään kuvaus $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ kaavalla $A \mapsto X/A$. Osoita, että tämä kuvaus on isomorfismi $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap) \to (\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$, eli on bijektio ja yhteensopiva vastaavien laskutoimitusten kanssa. Miten tämä kuvaus auttaisi edellisen tehtävän ratkaisussa?

12. Olkoon X joukko ja $\mathcal{P}(X)$ kuten edellisissä tehtävissä. Olkoon $x \in X$. Määritellän kuvaus $f\colon \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$, $f(A) = 1$ jos ja vain jos $x \in A$. Joukossa Y määritellään yhteenlasku ja kertolasku kuten reaaliluvuille, paitsi $1 + 1 = 0$. Tutki onko f laskutoimituksia säilyttävä kuvaus kun
a) $\mathcal{P}(X)$:ssä on $\bigcup$-laskutoimitus ja Y:ssä yhteenlasku,
b)$\mathcal{P}(X)$:ssä on $\bigcup$-laskutoimitus ja Y:ssä kertolasku,
c) $\mathcal{P}(X)$:ssä on $\bigcap$-laskutoimitus ja Y:ssä yhteenlasku,
d) $\mathcal{P}(X)$:ssä on $\bigcap$-laskutoimitus ja Y:ssä kertolasku.

13. Osoita, että vasemmanpuoleisen ja oikeanpuoleisen M-modulin käsitteet ovat ekvivalentteja, kun R on vaihdannainen rengas. Miksi tämä ei toimi ei-vaihdannaiselle renkaalle?

14. Olkoon $(V, +, \cdot)$ $\mathbb{C}$-vektoriavaruus. Määritellään V:ssä erilainen $\mathbb{C}$-skalaarikertolasku $\odot$ kaavalla

$$(x + iy) \odot v = (x - iy) \cdot v.$$

Osoita, että $(V, +, \odot)$ on $\mathbb{C}$-vektoriavaruus.

15. Olkoon V $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Määritellään joukossa $V \times V$ $\mathbb{C}$-vektoriavaruuden struktuuri asettamalla

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2),$$

$$(a + ib)(v, w) = (av - bw, aw + bv).$$

Osoita, että $V \times V$ on tällöin todellakin $\mathbb{C}$-vektoriavaruus.
Osoita, että sen osajoukko $\{(v, 0) \mid v \in V\}$ on suljettu skalaarikertolaskun $\mathbb{R}$:n alkioilla ja $\mathbb{R}$-vektoriavaruutena isomorfinen V:n kanssa.

Tämän johdosta samastetaan $(v, 0)$ $v \in V$:n kanssa. Osoita, että näillä merkinnöillä jokainen $V \times V$:n alkio voidaan kirjoittaa muotoon $v + iw$, $v, w \in V$ ja tällainen esitys on yksikäsitteinen.

16. Olkoon R vaihdannainen ykkösellinen rengas ja $x \in X$. Määritellään

$$I_x = \{rx \mid r \in R\}.$$

Osoita, että I_x on ideaali, $x \in I_x$ ja jos $J \subset R$ on ideaali, jolle $x \in J$, niin $I_x \subset J$. Toisin sanoen osoittaa, että I_x on sisältyvyysrelaation suhteen pienien R:n ideaali, joka sisältää x:n.
Miten I_x:n määritelmä pitää muuttaa jos tarkasteltava rengas ei ole ykkösellinen? ei ole vaihdannainen? ei ole kumpaakaan?

17. Olkoon R vaihdannainen ja ykkösellinen rengas. Osoita, että se on kunta jos ja vain jos sillä on vain triviaalit ideaalit $\{0\}$ ja R.

18. Osoita tarkasti, että Abelin ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ jokainen aliryhmä on muotoa $n\mathbb{Z}$ jollakin $n \geq 0$.

19. Olkoon I renkaan R-ideaali ja olkoon M jokin R-moduli. Määritellään

$$N = \{xm \mid x \in I, m \in M\}.$$

Osoita, että N on M:n alimoduli, joten tekijämoduli M/N on olemassa ja on R-moduli.
Osoita, että M/N:ssä voidaan määritellä R/I skalaarikertolaskun kaavalla

$$(r + I)(m + N) = rm + N$$

ja M/N on R/I-moduli tällä varustettuna (ja yhteenlasku sama kuin ennen).