Äärellisulotteinen lineaarialgebra, syksy 2012.
Harjoitus 9.

1. a) Olkoon R vaihdannainen rengas ja $r_1, \ldots, r_n$ sen alkiot. Olkoon
$$I = \{\sum_{i=1}^{n} a_i r_i \mid a_1, \ldots, a_n \in R\}.$$
Osoita, että I on alkioiden $r_1, \ldots, r_n$ virittämä ideaali eli (sisältyvyys relaation suhteen) pienin R:n ideaali joka sisältää alkiot $r_1, \ldots, r_n$.
b) Olkoot $p_1, \ldots, p_n$ polynomialebran $K[X]$ alkiot (missä K kunta). Sanomme, että ne ovat *keskenään jaottomat* jos ainoat niiden yhteiset tekijät $K[X]$:ssä ovat vakiopolynomit.
Osoita, että $p_1, \ldots, p_n$ ovat keskenään jaottomat jos ja vain jos on olemassa polynomit $q_1, \ldots, q_n \in K[X]$ siten, että
$$\sum_{i=1}^{n} q_i p_i = 1.$$

2. Olkoon $p \in K[X]$ polynomi, missä K kunta.
a) Osoita, että K-algebrassa $K[X]/(p)$ polynomilla p on ainakin yksi juuri.
b) Osoita, että K-algebra $K[X]/(p)$ on (renkaana) kunta jos ja vain jos p on jaoton polynomi. (Vihje: osoita, että jos $\bar{q} \neq 0$, niin p ja q ovat keskenään jaottomat. Käytä sitten edellistä tehtävää).
Tässä (p) on p:n virittämä $K[X]$:n ideaali.

3. Tarkastellaan $\mathbb{R}$-matriisia
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
Laske χ_A ja m_A (Vihje: χ_A voidaan laskea suoraan ja m_A tiedetään olevan sen jokin tekijä).
Totea myös jossakin vaiheessa suoraan laskemalla, että $m_A(A) = 0$.

4. Tarkastellaan $\mathbb{R}$-kertoimista $(n \times n)$-matriisia
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$
jonka kaikki alkiot ovat siis 1. Oletetaan, että $n \geq 2$.
a) Osoita, että $S^2 = nS$ ja päättele tästä, että S:n minimipolynomi on $X^2 - nX$. Osaatko päätellä tästä suoraan mitä ominaisarvoja S:llä on?
b) Laske S:n jokaisen ominaisarvon geometrinen kertaluku. Pystytkö tästä päättelemään mitkä ovat sen ominaisarvojen algebralliset kertaluvut ja muodostaa S:n karakteristinen polynomi?
c) Onko S diagonalisoituva?

5. Tarkastellaan seuraavat $\mathbb{R}$-algebrat.

$$A_1 = \mathbb{R}[X]/(X^2),$$
$$A_2 = \mathbb{R}[X]/(X^2 - 1),$$
$$A_3 = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1).$$

a) Totea, että kaikki nämä ovat 2-ulotteiset $\mathbb{R}$:n suhteen.
b) Osoita, että A_1 on näistä kolmesta ainoa, jossa on olemassa alkio $x \neq 0$ jolle $x^2 = 0$.
b) Osoita, että A_2 ei ole kokonaisalue.
c) Osoita, että A_3 on isomorfinen $\mathbb{C}$:n kanssa, joten erityisesti on kunta.
d) Päättele, että näistä kolmesta mitkään kaksi eivät ole isomorfisia keskenään.

6. Olkoon A ykkösellinen 2-ulotteinen $\mathbb{R}$-algebra.
a) Osoita, että sillä on kanta $\{1, a\}$, jossa siis esiintyy A:n kertolaskun neutraalialkio 1. Miten tästä seuraa, että A on vaihdannainen?
b) Osoita, että A:lla on kanta $\{1, u\}$ jossa $u^2 \in \mathbb{R}$. Tässä, kuten yleensä, identifioimme $\mathbb{R}$:n alkio x ja algebran alkio $x \cdot 1$. (Vihje: täydennä a:n minimipolynomi neliöksi).
c) Osoita, että A:llä on kanta $\{1, z\}$, missä $z^2 \in \{-1, 0, 1\}$. (Vihje: normeera u edellisestä kannasta sopivasti).
d) Päättele (edellisen tehtävän avulla), että isomorfiaa vaille on olemassa tasan 3 2-ulotteista ykkösellistä $\mathbb{R}$-algebraa ja niistä vain $\mathbb{C}$ on kunta.
e) Määritellään $\mathbb{R}$-vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kertolasku koordinateittain, eli

$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu, yv).$$

Tällöin $\mathbb{R}^2 = A$ on selvästi 2-ulotteinen $\mathbb{R}$-algebra, lisäksi sen standardikannalle $\{e_1, e_2\}$ pätee $e_i \cdot e_j = \delta_{ij} e_i$.
Osoita, että A on isomorfinen A_2:n kanssa (missä A_2 määritelty edellisessä tehtävässä). Etsi konkrettinen A_2:n kanta $\{e_1, e_2\}$, jolle pätee $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$.

Lisäpisteitä laskuharjoituksista saa seuraavasti:

25% - 2 pistettä, 40% - 4 pistettä, 50% - 5 pistettä, 75% - 8 pistettä.