Äärellisulotteinen lineaarialgebra, syksy 2012.
Harjoitus 3.

1. Olkoon R vaihdannainen rengas. Nollasta eroavaa alkiota $a \in R$ sanotaan *nollan jakajaksi* jos on olemassa $b \neq 0, b \in R$ jolla $ab = 0$. Rengas sanotaan *kokonaisalueeksi* jos mikään sen nolla-alkiosta eroava alkio ei ole nollan jakaja.
   a) Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä vaihdannaiselle renkaalle R.

   (i) R on kokonaisalue.

   (ii) R:ssä on voimassa seuraava supistussääntö.
   Olkoot $a, b, c \in R$. Tällöin jos
   $$ab = ac,$$
   niin joko $a = 0$ tai $b = c$.

   (iii) Jokaisella $a \in R, a \neq 0$ kuvaus $f\colon R \to R$, $f(x) = ax$ on injektio.

   Osoita, että jokainen kunta on kokonaisalue. Anna esimerkkejä vaihdannaisista renkaista, jotka ovat kokonaisalueita, mutta eivät ole kuntia ja vaihdannaisista renkaista jotka eivät ole kokonaisalueita.

   b) Osoita, että jokainen epätriviaali *äärellinen* kokonaisalue on kunta, jos se on ykkösellinen renkaana (vihje: a)-kohdan ehto (iii)).

2. Olkoon $n \geq 1$ luonnollinen luku. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.
   (i) $\mathbb{Z}_n$ on kunta.
   (ii) $\mathbb{Z}_n$ on kokonaisalue.
   (iii) n on alkuluku.

3. a) Edellisen tehtävän nojalla $\mathbb{Z}_7$ on kunta. Laske sen jokaisen nollasta eroavan alkion käänteisalkio (kertolaskun suhteen).
   b) $\mathbb{Z}_9$ ei taas ole kunta. Laske millä sen alkioilla on käänteisalkio kertolaskun suhteen ja millä alkioilla taas ei ole.

4. Määritellään ryhmähomomorfismi $f\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ kaavalla
   $$f(x) = (\cos x, \sin x).$$
   (kts. esim. 1.9 ja 1.12). Mikä on sen kuvajoukko $\operatorname{Im} f$? Mikä on sen ydin $\operatorname{Ker} f$?
   Minkälaisen tuloksen isomorfialause antaa, kun se sovelletaan tähän kuvaukseen?

5. Olkoot
   $$V = \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ on polynomi } \},$$
   $$W = \{p \in V \mid p(0) = 0\}.$$
   Nämä ovat selvästi $\mathbb{R}$-vektoriavaruuksia. Osoita (isomorfialauseen avulla), että V/W on isomorfinen $\mathbb{R}$:n kanssa.

6. Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä. Sanomme, että G on *jakoryhmä*, jos jokaisella $x \in G$ ja $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ on olemassa $y \in G$ jolle $y^n = x$. Toisin sanoen jakoryhmä on ryhmä, jossa jokaisen kertaluvun juuret on olemassa.
   Jos G on Abelin ryhmä ja merkintä on additiivinen, jakoryhmän ehto sanoo, että jokaisella $x \in G, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ on olemassa y jolle $ny = x$.
   Anna esimerkkejä Abelin ryhmistä, jotka ovat jakoryhmiä ja Abelin ryhmistä, jotka eivät ole jakoryhmiä. Onko tällainen alkion juuri välttämättä yksikäsitteinen jakoryhmässä? (Vihje: mieti esim. kompleksilukujen kertolaskua).
   Olkoon $(V, +, \cdot)$ $\mathbb{Q}$-vektoriavaruus. Osoita, että $(V, +)$ on jakoryhmä.
   Voidaanko kääntäen määritellä $\mathbb{Q}$-vektoriavaruuden struktuurin jokaisessa jakoryhmässä? (Vihje: osoita, että $\mathbb{Q}$-vektoriavaruudessa alkion "juuri" on yksikäsitteinen).

Lisäpisteitä laskuharjoituksista saa seuraavasti:

25% - 2 pistettä, 40% - 4 pistettä, 50% - 5 pistettä, 75% - 8 pistettä.