Äärellisulotteinen lineaarialgebra, syksy 2012.
Harjoitus 2.

1. Olkoon $(A, +)$ Abelin ryhmä. Määritellään joukossa $P = A^A = \{f : A \to A\}$ laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ seuraavasti,
$$(f + g)(a) = f(a) + g(a),$$
$$(g \cdot f)(a) = g(f(a)).$$
Osoittaa, että $(P, +, \cdot)$ toteuttaa kaikki ykkösellisen renkaan ehdot, paitsi toinen osittelulaki ei päde (jos A:ssä on vähintään kaksi alkioita).

2. Olkoot A ja P kuten edellisessä tehtävässä. Tarkastellaan P:n osajoukkoa
$$Q = \mathrm{Hom}(A) = \{f : A \to A \mid f \text{ on ryhmähomomorfismi } \}.$$
Osoita, että Q on vakaa P:n molempien laskutoimitusten suhteen, joten algebrallinen struktuuri $(Q, +, \cdot)$ on hyvinmääritelty.
Osoita, että $(Q, +, \cdot)$ on itse asiassa ykkösellinen rengas.

3. Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas. Tällöin $A = (R, +)$ on Abelin ryhmä ja voimme muodostaa sen ryhmähomomorfismien renkaan $(Q, +, \cdot)$ kuten edellisessä tehtävässä.
Määritellään jokaisella $r \in R$ kuvauksen $f_r : R \to R$ kaavalla $f_r(a) = ra$ kaikilla $a \in R$. Osoittaa, että $f_r \in Q$ jokaisella $r \in R$ ja kuvaus $R \to Q$, $r \mapsto f_r$ on rengashomomorfismi.

4. Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas ja olkoon $(M, +, \cdot)$ jokin R-moduli. Tällöin $A = (M, +)$ on Abelin ryhmä ja voimme muodostaa sen ryhmähomomorfismien renkaan $(Q, +, \cdot)$ kuten tehtävässä 2.
Määritellään jokaisella $r \in R$ kuvauksen $f_r : M \to M$ kaavalla $f_r(a) = ra$ kaikilla $a \in M$. Osoittaa, että $f_r \in Q$ jokaisella $r \in R$ ja kuvaus $R \to Q$, $r \mapsto f_r$ on rengashomomorfismi.
Onko edellinen tehtävä tämän tehtävän erikoistapaus? Miksi/miksi ei?

5. Olkoon $\cdot$ liitännäinen laskutoimitus joukossa X ja oletetaan, että X:llä on neutraalialkio e tämän laskutoimituksen suhteen.
Määritellään
$$X^* = \{x \in X \mid x^{-1} \text{ on olemassa } \}.$$
Osoita, että osajoukko X^* on suljettu laskutoimituksen $\cdot$ suhteen.
Todista, että $(X^*, \cdot)$ on itse asiassa ryhmä.
Mikä on X^* kun
a) $X = \mathbb{R}$, laskutoimituksena tavallinen kertolasku.
b) $X = K$ jokin kunta, laskutoimituksena kunnan kertolasku.
c) $X = \mathbb{Z}$, laskutoimituksena tavallinen kertolasku.
d) $X = Y^Y$ jollakin joukolla Y, laskutoimituksena kuvausten yhdistäminen.

6. Olkoon $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ positiivisten reaalilukujen joukko.
Määritellään laskutoimitukset $\oplus : V \times V \to V$, $\odot : \mathbb{R} \times V \to V$ kaavoilla
$$\oplus(x, y) = xy \text{ (tavallinen reaalilukujen kertolasku) },$$

$$\odot(r,x) = x^r \text{ (tavallinen eskponentti)} .$$

Osoita määritelmästä lähtien, että $(V, \oplus, \odot)$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Mikä on nolla-vektori?

Lisäpisteitä laskuharjoituksista saa seuraavasti:

25% - 2 pistettä, 40% - 4 pistettä, 50% - 5 pistettä, 75% - 8 pistettä.