Äärellisulotteinen lineaarialgebra, syksy 2012.
Harjoitus 13.

1. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$
reaaliarvoinen symmetrinen (2×2)-matriisi. Osoita, että se on positiivisesti definiiti jos ja vain jos $a > 0$ ja $\det A > 0$.

2. Olkoon V $\mathbb{C}$-sisätuloavaruus ja $L\colon V \to V$ operaattori.
a) Osoita, että kaikilla $v, w \in V$ pätee
$$4\langle Lv, w\rangle = \langle L(v{+}w), v{+}w\rangle - \langle L(v{-}w), v{-}w\rangle + i(\langle L(v{+}iw), v{+}iw\rangle - \langle L(u{-}iw), u{-}iw\rangle).$$
b) Oletetaan, että $\langle Lv, v\rangle = 0$ kaikilla $v \in V$. Osoita, että $L = 0$.
c) Anna esimerkki $\mathbb{R}$-lineaarisesta operaatorista $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siten, että $\langle Lv, v\rangle = 0$ kaikilla $v \in \mathbb{R}^2$, mutta $L \neq 0$.

3. Olkoon V K-sisätuloavaruus, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ja $L\colon V \to V$ lineaarinen operaattori. Osoita, että V:llä on olemassa ortonormaalit kannat $\mathbf{e}, \mathbf{f}$, siten, että matrisi $[L]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}$ on diagonaalinen.

4. Olkoot m, n positiiviset kokonaisluvut. Osoita, että $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ on syklinen ryhmä jos ja vain jos m ja n ovat suhteellisia alkulukuja (eli ainoa niiden yhteinen positiivinen tekijä on 1).

5. Tutki ovat ryhmät $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{72}$ ja $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{48}$ isomorfiset keskenään. Esitä kumpikin ryhmä sekä muodossa
$$\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \mathbb{Z}_{m_k}.$$
missä, $m_1 | m_2 | \ldots | m_{k-1} | m_k$, että syklisten p_i-ryhmien suorana summana (missä p_i:t alkulukuja).

6. Osoita seuraava *supistussääntö* - jos A, B, C ovat äärellisviritteiset Abelin ryhmät ja $A \oplus C \cong B \oplus C$, niin $A \cong B$.

Lisäpisteitä laskuharjoituksista saa seuraavasti:

25% - 2 pistettä, 40% - 4 pistettä, 50% - 5 pistettä, 75% - 8 pistettä.