Äärellisulotteinen lineaarialgebra, syksy 2012.
Harjoitus 12.
HUOM! Nämä käsitellään ke 5.12 klo 8-10 luokassa D123, eikä perjantaina, kuten yleensä!

1. Osoita, että $U \in M(2 \times 2; \mathbb{C})$ on $SU(2)$:n alkio jos ja vain jos se on muotoa
$$\begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}$$
missä $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$.
(Vihje: Cramerin säännöstä ja ehdosta $U^{-1} = U^*$ voi olla iloa).

2. Olkoon $L\colon V \to V$ normaali operaattori, missä $V$ äärellisulotteinen $K$-vektoriavaruus. Osoita, että $\lambda \in K$ on $L$:n ominaisarvo jos ja vain jos $\overline{\lambda}$ on $L^*$:n ominaisarvo. Osoita, että lisäksi $L(x) = \lambda x$ jos ja vain jos $L^*(x) = \overline{\lambda} x$.

3. Olkoon $L$ normaali operaattori $\mathbb{C}$-sisätuloavaruudessa $V$ ja oletetaan, että $L^9 = L^8$. Osoita, että $L^2 = L$.

4. $\mathbb{R}^n$:n osajoukko $E$ on (origokeskeinen) *ellipsoidi* jos on olemassa positiiviset reaaliluvut $a_1, \ldots, a_n$ ja jokin $\mathbb{R}^n$ ortonormaali kanta $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ (pistetulon suhteen) siten, että
$$E = \{\sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2 \leq 1\}.$$
Osoita, että osajoukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on ellipsoidi jos ja vain jos se on jonkun $\mathbb{R}^n$:n sisätulon $\langle , \rangle$ määrämä yksikköpallo eli joukko
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \leq 1\}.$$
Miten tästä voidaan päätellä, että $\mathbb{R}^2$:n normi $|x| = |x_1| + |x_2|$ ei ole minkään sisätulon määrämä? (Tämän kysymyksen vastaukseksi riittää kuvien piirtäminen ja heuristinen, intuitiivinen perustelu).

5-6. Palautetaan mieleen Harjoitustehtävän 8.5-6 tarkasteltua *kvakternionien* $\mathbb{R}$-algebraa $Q$, joka voidaan määritellä $M(2 \times 2; \mathbb{C})$ osajoukkona, joka koostuu muotoa
$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \tag{1}$$
olevista matriiseista, $z, w \in \mathbb{C}$. Samassa harjoituksessa näytettiin, että $Q$ voidaan yhtä hyvin mallintaa $\mathbb{R}$-algebrana $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, kun samastetaan matriisi (1) alkion $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ kanssa. Tässä tulkinnassa kvartenionien kertolasku on määritely kaavalla
$$(z, w) \cdot (z', w') = (zz' - w\overline{w'}, zw' + w\overline{z'}).$$
Kun $z, w \in \mathbb{C}^2$ tulkitaan pareina $z = (x, y), w = (u, v) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, voidaan $Q$:n alkio ajatella myös $\mathbb{R}^4$:n alkiona $(x, y, u, v)$. Kanoninen $\mathbb{R}^4$:n kanta $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ vastaa Harjoituksessa 8.5-6 tarkasteltua kantaa $(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.
$Q^* = Q \setminus \{0\}$ on ryhmä kertolaskun suhteen. Tämäkin todistettiin Harjoituksen 8.5-6 yhteydessä.

a) Totea (harjoituksen 1 avulla), että $SU(2)$ voidaan luonnollisella tavalla ajatella $Q^*$:n aliryhmänä. Tulkinnassa $Q = \mathbb{R}^4$

$$SU(2) = S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| = 1\},$$

missä käytämme tavallista normia $\mathbb{R}^4$:ssä.
b) Jokaisella $q \in S^3 = SU(2)$ tarkastellaan kuvausta $L_q \colon Q \to Q$, $L_q(r) = qrq^{-1}$. Osoita, että tämä kuvaus on $\mathbb{R}$-lineaarinen ja $\mathbb{R}^4$:n kolmiulotteinen aliavaruus $V = \mathrm{Span}(e_2, e_3, e_4)$ on $L_q$-invariantti.
c) Avaruus $V \subset \mathbb{R}^4$ on sisätuloavaruus, kun se varustetaan tavallisella pistetulolla. Osoita, että $L_q$ on ortogonaalinen $V$:n operaattori jokaisella $q \in S^3$.
d) Edellisen kohdan nojalla saadaan kuvaus $q \mapsto [L_q]_{\mathbf{e}}$ ryhmien $SU(2)$ ja $O(3)$ välillä. Tässä $\mathbf{e} = (e_2, e_3, e_4)$. Osoita, että tämä on ryhmähomomorfismi. Laske sen ydin.
(Huomautus: voidaan osoittaa, että tämän kuvauksen kuva on ryhmä $SO(3)$. Näin saadaan mielenkiintoinen esitys jälkimmäiselle ryhmän $SU(2)$ tekijäryhmänä).

Lisäpisteitä laskuharjoituksista saa seuraavasti:

25% - 2 pistettä, 40% - 4 pistettä, 50% - 5 pistettä, 75% - 8 pistettä.