Äärellisulotteinen lineaarialgebra, syksy 2012.
Harjoitus 1.

1. Ovatko seuraavat hyvinmääriteltyjä laskutoimituksia joukossa X?
Jos ovat, onko laskutoimitus liitännäinen? Vaihdannainen? Onko sillä neutraalialkio?
Jos eivät ole, niin mistä se johtuu? Voidaanko tässä tapauksessa täsmentää/tiukentaa joukon X/laskutoimituksen määritelmää, niin, että siitä tulee hyvinmääritely? Onko se silloin liitännäinen, vaihdannainen, onko sillä neutraalialkio?

   a) X on kaikkien suomen kielen sanojen muodostama joukko. Laskutoimitus $\cdot\colon X \times X \to X$ määritelty seuraavasti - jos a ja b ovat sanat, tulo $a \cdot b$ on yhdyssana, joka saadaan yhdistämällä a ja b (tässä järjestyksessä). Esimerkiksi yhdys $\cdot$ sana=yhdyssana, lasku$\cdot$toimitus=laskutoimitus.

   b) Olkoon $A = \{x, y\}$. Äärellinen lauseke, joka on muodostettu kirjaimista x ja y, sanomme **aakoston A sanaksi**. Esimerkiksi x, xy, $yyxyx$ ovat kaikki aakoston A sanat. Hyväksymme sanaksi myös ns. " tyhjä sana", eli lauseke, jossa ei ole kirjamia. Olkoon X kaikkien aakoston A sanojen muodostama joukko. Määritelemme laskutoimitus $\cdot$ joukossa X sanojen katenoinnilla, eli $a \cdot b$ on sana, joka saadaan kirjoitamalla sanan a perään sana b. Esimerkiksi $xx \cdot yx = xxyx$.

   c)Olkoon X kaikkien koskaan eläneiden naispuoleisten ihmisten muodostama joukko. Määritellään laskutoimitus $\cdot$ seuraavasti. Jos X ja Y ovat naisia, niin $X \cdot Y$ on heidän viimeinen elossa ollut naispuoleinen esi-äiti (eli sellainen, että molemmat X ja Y ovat sen jälkeläisiä ja kaikista esi-äidistä kuollut viimeisenä).

   d) X kaikkien kemiaalisten yhdisteiden joukko ja $x \cdot y$ - kemiaalinen yhdiste joka saadaan kun x ja y sekoitetaan ja annetaan reagoida keskenään.

2. Olkoot X ja Y joukkoja ja $f\colon X \to Y$ kuvaus.
a) Osoita, että on olemassa $g\colon Y \to X$ siten, että $g \circ f = \mathrm{id}_X$, jos ja vain jos f on injektio.
b) Osoita, että on olemassa $g\colon Y \to X$ siten, että $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, jos ja vain jos f on surjektio.
Tässä $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ on joukon A identtinen kuvaus.

3. Olkoon $\cdot$ joukossa X määritelty liitännäinen laskutoimitus ja $x, y \in X$. Oletetaan, että laskutoimituksella on neutraalialkio ja alkiolla x ja y on olemassa käänteisalkiot. Osoita, että myös alkiolla xy on tällöin käänteisalkio ja
$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

4. Olkoon $(X, \cdot)$ ryhmä, jossa $x^2 = x \cdot x = e$ jokaisella $x \in X$. Tässä e on X:n neutraalialkio. Osoita, että X on Abelin ryhmä. (Vihje: edellisestä tehtävästä saattaa olla hyötyä).

5. Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas.
   a) Osoita, että $(-a) \cdot b = -(ab) = a \cdot (-b)$ kaikilla $a, b \in R$.
   b) Osoita, että tutut "muistikaavat"

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

   sen sijaan ovat voimassa kaikilla $a, b \in R$ jos ja vain jos R on kommutatiivinen rengas.
   (Huom., vähennyslasku renkaassa on määritelty kaavalla

$$x - y = x + (-y).)$$

6. Olkoon K kunta. Kun $a, b \in K, b \neq 0$ määritellään "murtolauseke" $\frac{a}{b}$ kaavalla

$$\frac{a}{b} = ab^{-1} = b^{-1}a.$$

   Osoita, että "koulusta tutut" kaavat

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

   ovat voimassa.

Lisäpisteitä laskuharjoituksista saa seuraavasti:

25% - 2 pistettä, 40% - 4 pistettä, 50% - 5 pistettä, 75% - 8 pistettä.