5.2 Zornin lemman sovelluksia lineaarialgebrassa

Matemaattisissa todistuksissa ja konstruktioissa usein joudutaan tekemään "samanaikaisia valintoja" tai "täydentämään haluttuja ominaisuuksia omaava olio maksimaaliseksi", eli sellaiseksi, että sitä ei voi enää täydentää. Vaikka ensi näkemältä ne näyttävät erilaisilta menetelmiltä, kyse on itse asiassa samasta periaatteesta.
"Epäkonstruktivistisesta" valinnasta on kyse kun tiedämme, että jokin olio on olemassa, mutta emme konstruoi sitä " eksplisiittisesti ", vaan sen sijan vetoamme suoraan siihen, että sen olemassaolo tiedetään olevan tosi. Usein emme edes pysty konstruoimaan olio, ainoastaan osoittamaan että sen on pakko olla olemassa. Lisäksi tällainen olio ei ole yksikäsitteinen, muuten kyse ei olisi valinnasta. Tiedämme siis että joitakin otuksia on olemassa, emme pysty antamaan yhdestäkään esimerkin, mutta voimme silti "ottaa yksi niistä". Esimerkiksi tarkastelemalla joukkojen mahtavuuksia on helppo näyttää, että algebrallisten reaalilukujen joukko on numeroituva. Koska tiedetään, että reaalilukuja on ylinumeroituva määrä, transsendentteja lukuja on pakko olla olemassa. Voimme siis jossakin todistuksessa sanoa "olkoon x transsendentti reaaliluku", vaikka emme osaisi konstruoida yhtäkään esimerkkiä sellaisesta x:stä.
Tällaisen yhden valinnan tekeminen ei vaadi mitään erikoista ylimääräistä työkalua. Kysehän on siitä, että jos tiedämme joukon olevan epätyhjä, niin voidaan ottaa sieltä yhden alkion -suorastaan epätyhjän joukon määritelmän mukaan.
Teknisiä ongelmia, tai pikemminkin voimakkaan työkalun tarve syntyy, kun joudumme tekemään samaan aikaan monta valintaa. Mitä jos tarvitsemme jossakin todistuksessa samaan aikaan kaksi transsendenttiä lukua? No valitaan yksi ja sitten toinen. Kolme? Valitaan yksi, sitten toinen, sitten kolmas. Jos lukuja tarvitaan vain äärellinen, fiksattu määrä, valinta voidaan suorittaa äärellisellä induktiolla. Mutta entäs jos tarvitaan äärettömän monta alkiota samaan aikaan emmekä pysty konstruoida eksplisiittisesti yksi fiksattu joukko, joka sisältää tarvitsemat alkiot, joudumme turvautumaan *valinta-aksioomaan.*
Valinta-aksiooma sanoo, että jos on annettu (indeksoitu) kokoelma $(A_i)_{i\in I}$ joukkoja, joista jokainen on epätyhjä, niin on olemassa kokoelma $(a_i)_{i\in I}$, jossa $a_i \in A_i$. Toisin sanoen jos jokaisesta joukosta erikseen pystymme valitsemaan alkion, voimme valita ne samanaikaisesti. Vaikka tämä tuntuu aika itsestään selvältä, osoittautuu, että valinta-aksioomaa ei pysty johtamaan muista joukko-opin periaatteesta, eikä se siis erityisesti seuraa siitä, että jo-

kaisesta epätyhjästä joukosta erikseen voidaan ottaa yksi alkio. Sen takia, jos sen haluaa käyttää, on pakko hyväksyä se *aksioomana*.
Valinta-aksiooma voidaan muotoilla myös käyttämällä mielivaltaisen karteesisen tulon käsitettä. Nimittäin kokoelma $(a_i)_{i\in I}$, jossa $a_i \in A_i$, on määritelmän mukaan tulojoukon $\prod_{i\in I} A_i$ alkio. Valinta-aksiooma siis väittää, että epätyhjien joukkojen mielivaltainen karteesinen tulo on myös epätyhjä.
Toinen monissa tärkeissä todistuksissa esiintyvä välivaihe on täydentäminen "maksimaaliseksi". Se tarkoittaa taas sitä, että tarvitsemme olion on oltava "täydellinen", paras mahdollinen. Oletetaan, että emme taaskaan pysty konstruoimaan olion ihan eksplisiittisesti, ainoastaan aloittamaan konstruktion ja näyttämään, että voimme aina jatkaa sen "yhden pykälän eteenpäin" kun se on osittain konstruoitu. Tilanne muistuttaa induktiota (joka on itse asiassa tämän menetelmän erikoistapaus) - näytämme, että päästään alkuun ("alkuaskel") ja näytämme, että seuraava vaihe on aina mahdollinen ("induktioaskel").
Miten tämä liittyy valinta-aksiooman? Asia voidaan ajatella näin. Jos haluamme osoittaa valinta-aksiooma todeksi jossakin konkreettisessa tapauksessa, meidän on konstruoituvaa jokin perhe $(a_i)_{i\in I}$. Voimme ajatella tämä konstruktio "prosessina", jossa "osittaiseen ratkaisuun " $(a_i)_{i\in J}$, $J \subset I$ lisätään aina yksi alkio kerrallaan, täydentämällä se, kunnes koko joukko I "tyhjentyy". Jos I on äärellinen, tämä voidaan tehdä helpolla induktiolla. Mutta jos I on ääretön, miten voimme olla varmoja että se tyhjentyy ja miten tällainen tyhjentyminen ylipäätään saadaan aikaan? Tarvitaan jonkinlainen "loppuun viemisperiaate", joka antaisi aina tarvittaessa *maksimaalisen* ratkaisun ongelmaan. Juuri tällainen periaate on kuuluisa **Zornin lemma**.
Zornin lemman muotoiluun tarvitaan järjestysrelaation käsitettä.
Relaatiota $\leq$ joukossa X sanotaan *(osittaiseksi) järjestykseksi* jos se on transitiivinen ja refleksiivinen eli jos $x \leq x$ kaikilla $x \in X$ ja aina kun $x \leq y, y \leq z$ niin myös $x \leq z$.
Järjestysrelaatiolla varustettu joukko X (tarkemmin pari $(X, \leq)$) sanotaan järjetetyksi joukoksi.
Tyypillinen esimerkki järjestysrelaatiosta on joukon X osajoukkojen joukossa $\mathcal{P}(X)$:ssä määritelty joukkojen sisältyvyysrelaatio $\subset$.
Järjestetyn joukon X osajoukko A sanotaan *ketjuksi* jos sen alkiot ovat *verrattavissa toisiinsa* eli kaikilla $x, y \in A$ joko $x \leq y$ tai $y \leq x$. Induktiolla helposti nähdään, että jokainen ketjun äärellinen osajoukko $\{x_1, \dots, x_n\}$ sisältää *suurimman alkion* eli sellaisen x_j jolle $x_i \leq x_j$, $i = 1, \dots, n$. Tätä ketjujen ominaisuutta tulemme soveltamaan jatkossa.
Alkio $z \in X$ on osajoukon A *yläraja* X:ssä jos kaikilla $a \in A$ pätee $a \leq z$.
Alkio $z \in X$ on *maksimaalinen* jos jokaisella $x \in X$ ehto $z \leq x$ implikoi, että $x \leq z$.

Lemma 5.16. Zornin lemma.
Olkoon X epätyhjä järjestetty joukko. Oletetaan, että jokaisella X:n ketjulla A on X:ssä yläraja. Tällöin X sisältää maksimaalisen alkion.

Emme todista tässä Zornin lemma. Tavallaan sitä ei edes ”voi todistaa”, sillä osoittautuu, että se on täysin ekvivalentti valinta-aksiooman kanssa - toinen voidaan ottaa aksioomana jolloin toinen voidaan todistaa. valinta-aksiooma on intuitiivisesti helppo hyväksyä totena, kun taas Zornin lemma on usein paljon helpompi soveltaa teknisellä tasolla. Näin ollen voidaan ajatella Zornin lemma ”aksioomaksi”. Tietenkin tämän tosiasian hyväksyminen vaatii sen, että on ensin nähnyt Zornin lemman todistuksen valinta-aksioomasta. Todistus löytyy esimerkiksi J. Väisälän kirjasta ”Topologia II”. Esitämme pari sovellusta Zornin lemmasta lineaarialgebrassa. Todistetaan sen avulla, että jokaisella vektoriavaruudella on kanta sekä sen, että vaihdannaisen renkaan yli vapaan modulin dimensio on yksikäsitteinen.

Propositio 5.17. *Olkoon V vektoriavaruus kunnan K yli. Olkoon C jokin V:n virittäjäjoukko ja A jokin V:n vapaa osajoukko siten, että $A \subset C$. Tällöin V:llä on olemassa kanta B siten, että $A \subset B \subset C$. Erityisesti V on vapaa.*

Todistus. Olkoon X joukko, jonka alkiot ovat V:n vapaat osajonot B', joille pätee $A \subset B' \subset C$. Kun tämä varustetaan tavallisella osajoukkojen sisältyvyys-relaatiolla $\subset$, siitä tulee järjestetty joukko. Osoitetaan, että tämä toteuttaa Zornin lemman oletuksia.
X on epätyhjä, sillä $A \in X$. Olkoon $Y \subset X$ ketju. Osoitetaan, että Y:n alkioiden (jotka ovat V:n osajoukkoja) yhdiste

$$D = \bigcup_{B' \in Y} B'$$

on Y:n yläraja. Selvästi $B' \subset D$ kaikilla $B' \in Y$. Epätriviaali vaihe on osoittaa, että D on X:n alkio, eli vapaa. Oletetaan, että

$$r_1a_1 + r_2a_2 + \ldots + r_na_n = 0,$$

$r_1, \ldots, r_n \in K$, $a_i \in B'_i \in Y$ eri alkiot. Koska Y on ketju, on olemassa $j \in \{1, \ldots, n\}$ jolle $B'_i \subset B_j$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Toisin sanoen

$$r_1a_1 + r_2a_2 + \ldots + r_na_n = 0$$

on lineaarinen kombinaatio, jonka alkiot ovat vapaan osajoukon B_j alkiot. Vapauden nojalla kombinaatio on triviaali eli $r_1 = \ldots = r_n = 0$. Siis D on

vapaa.
Järjestetty joukko X siis toteuttaa Zornin lemman oletuksia, joten sisältää maksimaalisen alkion B. Osoitetaan, että se on V:n kanta. Vapaus sisältyy määritelmään. Olkoon $v \in C$. Osoitetaan että $V \in \mathrm{Span}(B)$. Jos $v \in B$ asia on selvä. Muuten huomataan, että osajoukko $B' = B \cup \{v\}$ sisältyy C:hen ja sisältää B:n aidosti, joten maksimaalisuuden nojalla se ei ole vapaa. Toisaalta B on vapaa, joten epätriviaali lineaarinen kombinaatio, jonka arvo on nolla ja jonka alkiot ovat B':n alkiot, sisältää v:n kertoimella, joka ei ole nolla. Toisin sanoen on olemassa lineaarinen kombinaatio

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \ldots + r_n a_n + rv = 0,$$

missä $a_1, \ldots, a_n \in B, r \neq 0$. Tällöin r^{-1} on olemassa (tämä on ensimmäinen todistuksen ensimmäinen vaihe, jossa tarvitaan sitä, että K on kunta ja joka ei mene läpi yleisen renkaan tapauksessa), joten saadaan

$$v = -r_1' a_1 + r_2' a_2 + \ldots - r_n' a_n,$$

missä $r_i' = r_i/r$. Siis $v \in \mathrm{Span}(B)$. Näin ollen $C \subset \mathrm{Span}(B)$. Koska C on virittäjäjoukko, koko avaruus V on $\mathrm{Span}(B)$. Siis $\mathrm{Span}(B)$ on kanta. $\square$

Edellinen tulos on mielenkiintoinen, mutta saattaa tuntua siltä, etteihän se sellaisenaan suoraan liittyy äärellisulotteisten olioiden teoriaan, joka on tämän kurssin kiinnostuksen kohde. Olemmehan todistaneet samanlaisen tuloksen äärellisviritteisten vektoriavaruuksien kohdalla ilman Zornin lemmaa jo Luvussa 2. Tämä ei kuitenkaan tarkoittaa, että ei tuloksesta olisi mitään hyötyä nimenomaan äärellisulotteisten vektoriavaruuksien teoriassa. Matematiikassa on varsin yleistä, että vaikka haluaisikin tutkia jotakin erikoistapausta, matkan varrella joutuu mennä sen ulkopuolelle ja kehittää vahvoja menetelmiä ja olioita, jotka ovat hyödyllisiä, vaikka paljon yleisempiä kuin itse tutkittava objekti. Olemme itse asiassa tällä kurssilla nähneet paljon esimerkkejä tästä ilmiöstä. Polynomialgebra $K[X]$ on *äärettönulotteinen* vektoriavaruus, mutta se on kuitenkin aivan välttämätön jos haluamme luokitella äärellisulotteisten vektoriavaruuksien lineaarisia operaattoreita. Näin olleen jos haluamme tutkia äärellisulotteisia vektoriavaruuksia meidän on tunnettavaa myös äärettönulotteisten vektoriavaruuksien teoriaa. Karakteristisen polynomin määritelmässä joudumme ottamaan determinantteja renkaan $K[X]$ yli, joka ei ole kunta. Näin ollen, jos haluamme tutkia vektoriavaruuksia, meidän on tutkittavaa myös modulit ei-kuntien yli. Jos tutkimme vasemmanpuoleiset modulit ei-vaihdannaisten renkaiden yli - ja sellainen on esimerkiksi mikä tahansa vektoriavaruus V renkaan $L(V)$ modulina tulkittuna - törmäämme duaali-avaruuksien teoriassa oikeanpuolisiin renkaisiin luonnollisella tavalla. Nämä ovat kaikki esimerkkejä yleisestä periaatteesta, jonka

mukaan matematiikassa on aina osattavaa vähän muutakin kuin mistä olemme varsinaisesti kiinnostuneet. Elivätkään yleistykset tule tyhjästä pelkkään akateemisen yleistämisen nimessä, vaan ilmestyvät yksinkertaisimpien olioiden tutkimisessa luonnollisella tavalla.
Seuraava Zornin lemman sovellus sen sijaan liittyy suoraan äärellisulotteisten olioiden teoriaan. Se liittyy algebrallisen dimension määrittelemisen problematiikkaan. Tiedämme, että vektoriavaruuden K^n dimensio n on hyvinmääritelty avaruuden invariantti, eli $K^n \cong K^m$ jos ja vain jos $n = m$. Kuten seuraava yllättävään yksinkertainen esimerkki osoittaa, tämä ei päde paikkaansa jos tarkastellaan kunnan sijaan renkaita.

Esimerkki 5.18. *Konstruoidaan esimerkin epätriviaalista ykkösellisestä renkaasta R joka on R-modulina n-ulotteinen jokaisella $n \in \mathbb{N}$!*
Riittää löytää R siten, että $R \cong R^2$ R-modulina, silloin tällöin induktiolla helposti nähdään, että $R^n \cong R$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
Olkoon K kunta ja $V = K^{(\mathbb{N})}$ ääretönulotteinen vektoriavaruus jolla on numeroituva kanta $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Konkreettinen esimerkki tällaisesta on esimerkiksi polynomialgebra $K[X]$. Olkoon $R = L(V)$. Tällöin R on ykkösellinen rengas. Olkoot $f, g \in R$ yksikäsitteiset lineaariset kuvaukset joille

$$f(e_n) = \begin{cases} e_k, \ jos\ n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ 0, muuten \end{cases}$$

$$g(e_n) = \begin{cases} e_k, \ jos\ n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \\ 0, muuten \end{cases} .$$

Tällöin jokainen $L \in R$ voidaan kirjoittaa yksikäsitteisellä tavalla muodossa

$$L = af + bg,$$

missä $a, b \in R$. Tässä $a(e_k) = L(e_{2k})$ ja $b(e_k) = L(e_{2k+1})$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Näin ollen $\{f, g\}$ on R-kanta R:lle. Näin ollen $R \cong R^2$.
Ei ole vaikeata näyttää, että R:stä löytyy myös ääretön, numeroituva kanta. Sitä varten pitää kannan $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ indeksijoukko $\mathbb{N}$ jakaa äärettömään moneen äärettömään osaan, mikä ei ole vaikeata. Yllä annetussa konstruktiossa se jaettiin vain kahteen äärettömään osaan (parilliset ja parittomat luvut).

Edellisessä esimerkissä rengas R on ei-vaihdannainen. Osoitamme seuraavaksi (Zornin lemman avulla), että kun R on vaihdannainen, vapaan äärellisulotteisen modulin dimensio on yksikäsitteisesti määritelty. Tämä on jälleen kerran esimerkki ominaisuudesta, joka selittää sen, miksi modulien tutkimisessa usein oletetaan, että kerroinrengas on vaihdannainen.

Lemma 5.19. *Olkoon R epätriviaali vaihdannainen ykkösellinen rengas. Tällöin on olemassa R:n ideaali J siten, että R/J on kunta.*

Todistus. Osoitetaan, että R:llä on niin sanottu *maksimaalinen* ideaali $J \subsetneq R$. Maksimaalisuus tarkoittaa sitä, että $J \neq R$ eikä ole olemassa ideaaleja K, joille $J \subsetneq K \subsetneq R$. Miten tämä liittyy väitteeseen? No, jos J on maksimaalinen, niin tekijärengas R/J on aina kunta. Tämä nähdään seuraavasti. Koska $J \subsetneq R$, R/J on epätriviaali. Lisäksi se on vaihdannainen rengas. Olkoon $\bar{r} \neq 0 \in R/J, r \in R$. Tällöin $r \notin J$. Helposti nähdään, että osajoukko

$$J' = \{j + ar \mid j \in J, a \in R\}$$

on ideaali, itse asiassa pienin ideaali, joka sisältää sekä J, että r. Koska J on maksimaalinen, $J' = R$. Erityisesti on olemassa $j \in J, a \in R$ siten. että

$$1 = j + ar.$$

Ottamalla tästä luokat tekijärenkaassa R/J saadaan $1 = \bar{a}\bar{r}$. Koska R/J on vaihdannainen, $\bar{a}$ on $\bar{r}$:n käänteisalkio. Näin ollen R/J on kunta.
Väite on siis todistettua, jos todistamme, että R sisältää maksimaalisen ideaalin J. Tämähän kuulostaa ihan Zornin lemmalta! Olkoon X kaikkien R:n atojen ideaalien $J \neq R$ muodostama joukko, joka on järjestetty sisältyvyysrelaatiolla. Olkoon $Y \subset X$ ketju. Tällöin

$$J = \bigcup_{I \in Y} I$$

on Y:n yläraja X:ssä. Osoitetaan tämä. On selvä, että $I \subset J$ kaikilla $I \in X$. Ongelmana on osoittaa, että J on ideaali ja lisäksi $J \neq R$. Osoitetaan ensin, että se on ideaali. Jos $r \in R$ ja $x \in J$, niin $x \in I$ jollakin $I \in Y$, jolloin $rx \in I \subset J$. Olkoot $a, b \in J$. Tällöin $a \in I_1$, $b \in I_2$ joillakin $I_1, I_2 \in Y$. Koska Y on ketju, jompikumpi joukoista I_1, I_2 sisältää toisen, joten $a, b \in I$ jollakin $I \in Y$. Koska I on ideaali, $a - b \in I \subset J$. Koska selvästi $0 \in J$, $(J, +)$ on $(R, +)$:n aliryhmä. Olemme näyttäneet, että J on ideaali.
Osoitetaan, että se ei ole koko rengas R. Tehdään vasta-oletus, $J = R$. Erityisesti $1 \in J$. Tällöin on olemassa $I \in Y$ siten, että $1 \in I$. Olkoon $r \in R$. Koska I ideaali, $r = r \cdot 1 \in I$. Siis $I = R$. Tämä on ristiriita X:n määritelmän kanssa.
Järjestetty joukko X siis toteuttaa Zornin lemman oletukset, joten sisältää maksimaalisen alkion. Tämä on se, mitä piti osoittaa. $\square$

Propositio 5.20. *Olkoon R vaihdannainen epätriviaali rengas ja $n, m \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että $R^n \cong R^m$. Tällöin $n = m$.*

Todistus. Esitetään todituksen idea. Tekniset yksityiskohdat jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.
Olkoon M äärellisulotteinen R-moduli jolla on olemassa kanta $(e_1, \ldots, e_n)$. Edellisen nojalla on olemassa R:n ideaali J siten, että $K = R/J$ on kunta. Määritellään M:n alimoduli

$$JM = \{jm \mid j \in J, m \in M\}.$$

Osoittautuu, että tekijämodulissa $M' = M/JM$ on olemassa luonnollinen K-vektoriavaruus struktuuri, jossa skalaarikertolasku määritelty kaavalla

$$(r + J)(m + JM) = rm + JM.$$

Lisäksi osoittautuu, että osajoukko $(e_1 + JM, \ldots, e_n + JM)$ on M':n kanta K-vektoriavaruutena. Koska vektoriavaruuksille dimensio tiedetään olevan yksikäsitteinen, väite seuraa. □

Päteekö vastaavanlainen tulos myös ääretönulotteisten vektoriavaruuksien/modulien kohdalla? Toisin sanoen, olemme näyttäneet, että jokaisella vektoriavaruudella on kanta. Lisäksi tiedämme, että jos se kanta on äärellinen, jokainen toinen kanta on samankokoinen. Onko vastaava tosi myös ääretönulotteiselle avaruudelle, eli ovatko kaksi ääretönulotteisen vektoriavaruuden kantaa "samankokoiset"?
Jotta kysymys olisi mielekäs, meidän pitää ensin selvittää mitä samankokoisuus tarkoittaa äärettömille joukoille. Äärellisten joukkojen kohdalla asia on tuttu - lasketaan molempien joukkojen alkioiden lukumäärä ja verrataan saatuja lukuja. Äärettömässä joukossa emme voi menetellä samoin - ei ainakaan ennen, kuin käytössämme on monimutkainen *ordinaalien* teoria.
Onneksi on olemassa yksinkertainen tapa verrata äärellisiäkin joukkoja ilman, että laskee niiden kokoja. Esimerkiksi oletetaan, että paritanssitilaisuuteen on tullut joukko miehiä ja naisia. Nämä ovat sen verran vanhanaikaisia, että miehet haluavat tanssia vain naisten kanssa ja päinvastoin. Miten voimme tietää riittääkö jokaiselle pari laskematta kuinka monta miestä ja kuinka monta naista on? Aletaan muodostaa pareja yksi kerrallaan. Jos loppujen lopuksi kukaan ei jää ilman paria, miehiä ja naisia on saman verran. Tämä on mahdollista jos ja vain jos miesten ja naisten joukkojen välillä löydetty bijektiivinen vastaavuus - jokaista miestä vastaa tasan yksi nainen.
Tätä äärellisten joukkojen samankokoisuuden kanssa yhtäpitävää ominaisuutta otetaan yleisesti samankokoisuuden määritelmäksi.
Sanomme, että joukoilla A ja B on *sama mahtavuus*(tai että ne ovat yhtämahtavia) jos on olemassa bijektio $f\colon A \to B$.
Voidaan osoittaa, että vektoriavaruuden kaksi kanta ovat aina yhtä mahtavia.

Tämän tarkaksi todistamiseksi kuitenkin pitää ensin selvittää mahtavuuksiin liittyviä perustuloksia. Koska niiden tarkka todistus ei ole aivan triviaali, esitämme ne ilman todistuksia.
Joukko on äärellinen jos se on yhtä mahtava kuin joukko $\{1, \ldots, n\}$ jollakin luonnollisella luvulla n. Tapaus $n = 0$ antaa tyhjän joukon.
Joukko, joka ei ole äärellinen, on määritelmän mukaan ääretön.

Lemma 5.21. *Olkoon X ääretön joukko. Tällöin*
a) $X \times X$ on yhtä mahtava kuin X ja
b) kaikkien X:n äärellisten osajoukkojen joukko Y on yhtä mahtava kuin X.
c) Oletetaan, että jokaisella $x \in X$ on annettu äärellinen joukko A_x. Tällöin yhdiste $\bigcup_{x \in X} A_x$ on yhtä mahtava kuin X.

Propositio 5.22. *Olkoon M vapaa R-moduli, missä R epätriviaali, vaihdannainen ja ykkösellisen rengas. Tällöin kaikki M:n kannat ovat yhtä mahtavia.*

Todistus. Jos tulos tunnetaan vektoriavaruuksille, se yleistetään vaihdannaisiin renkaisiin Lemman 5.19 avulla samalla tavalla kuin Proposition 5.20 todistuksessa.
Riittää siis tarkastella vektoriavaruuksien tapaus. Äärellinen tapaus tunnetaan jo, joten tarkastellaan tapaus, jossa vektoriavaruudella on ääretön kanta. Huomataan samalla, että tällöin sillä ei voi olla äärellistä kantaa, sillä Lemman 2.15 nojalla äärellisulotteine vektoriavaruus ei voi sisältää mielivaltaisen isoja (erityisesti äärettömiä) vapaita osajoukkoja.
Olkoot A ja B molemmat vektoriavaruuden V äärettömät kannat. Jokainen B:n alkio voidaan esittää äärellisenä lineaarisena kombinaationa

$$b = r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n,$$

missä $r_1, \ldots, r_n \in K$, lisäksi yksikäsitteisellä tavalla. Joukko $A' = \{a_1, \ldots, a_n\}$ on A:n äärellinen osajoukko. Kannan B alkiot voidaan siis jakaa (erillisiin) osiin $B_{A'}$, missä $A' \subset A$ on äärellinen ja $b \in B_{A'}$ tarkoittaa, että $b \in \mathrm{Span}(A')$. Koska B on vapaa, jokainen sen osajoukko $B_{A'}$ on vapaa. Lemman 2.15 nojalla $|B_{A'}| \leq |A'|$, missä $|\cdot|$ tarkoittaa äärellisen joukon kokoa. Erityisesti jokainen $B_{A'}$ on äärellinen. Merkitään C:llä A:n äärellisten osajoukkojen muodostamaa joukkoa. Edellisen lemman kohdan c) nojalla B, joka on yhdiste

$$\bigcup_{A' \in C} B_{A'},$$

on yhtä mahtava C:n kanssa, joka b)-kohdan nojalla on puolestaan yhtä mahtava A:n kanssa. Propositio on todistettu. $\square$