Kurssin tiivistelmä

Kurssin pääpaino on materiaalin luvuissa 2, 3, 4. Luku 1 eli ”Algebralliset operaatiot” on tarkoitettu johdotukseksi. Sen sisällön ymmärtäminen on erittäin tärkeä kurssin varsinaisen sisällön hahmottamisen kannalta, mutta ei kokeeseen tule mitään tehtäviä siihen liittyen.
Luvut 5 ja 6 on bonus materiaalia. Niistäkään kokeeseen ei tule tehtäviä.

5.2.1 Algebralliset struktuurit

Tärkeimmät käsitteet ja avainsanat in a nutshell:
- Ryhmä, Abelin ryhmä, rengas, kunta, moduli, vektoriavaruus, alistruktuuri, tekijästruktuuri, morfismi, lineaarinen kuvaus, ydin, kuvajoukko, isomorfialause, hajotelmalause.

- Algebrallinen struktuuri on algebrallisilla operaatioilla varustettu joukko X. Nämä operaatiot voivat olla laskutoimituksia joukossa X eli kuvauksia $X \times X \to X$, tai sitten jonkun joukon Y algebrallisia operaatioita joukossa X eli kuvauksia $Y \times X \to X$.
- Algebralliset struktuurit X ja Y ovat samaa tyyppiä, jos niissä on saman verran samantyyppisiä laskutoimituksia ja ne toteuttavat tähän tyyppiin liittyviä algebrallisia ominaisuuksia.
- Meidän kannalta keskeisiä tyyppejä muodostavat ryhmät, renkaat, kunnat, modulit, vektoriavaruudet ja myöhemmin kurssilla esille tuodut algebrat, erityisesti polynomialgebrat kunnan yli.
- Tärkeät algebralliset ominaisuudet ja käsitteet: liitännäisyys, vaihdannaisuus, neutraalialkio, käänteisalkio, nolla-alkio, vasta-alkio, osittelulait.
- Algebralliseen struktuuriin liittyvät luonnollisella tavalla sellaiset käsitteet kuin alistruktuuri ja tekijästruktuuri.
- Samantyyppiset struktuurit vertaillaan morfismien avulla. Morfismi on kuvaus, joka on yhteensopiva laskutoimitusten ja niiden ominaisuuksien kanssa. Modulien ja vektoriavaruuksien väliset morfismit ovat lineaariset kuvaukset.
- Morfismiin liityy alistruktuurit - kuvajoukko ja (silloin kuin neutraalialkio olemassa) ydin.

- Ryhmien tapauksessa ytimiä vastaavat normaalit aliryhmät, renkaiden tapauksessa vastaavat ideaalit, modulien tapauksessa alimodulit.

- Keskeinen työkalu erilaisten algebrallisten olioiden keskinäisen vertailemiseksi on **isomorfialause** ja yleisemmin, hajotelmalause (Lauseet 1.34 ja 1.33). Niitä voidaan aina soveltaa, kun on annettu morfismi kahden samantyyppisen struktuurin välillä.

5.2.2 Modulit

Kerroinrengas R oletetaan ykköselliseksi, epätriviaaliksi ja vaihdannaiseksi.

Luvun 2 tärkeimmät käsitteet ja avainsanat in a nutshell:
- Vapaa joukko, virittäjäjoukko, Span, kanta, dimensio, äärellisviritteinen, äärellisulotteinen, R^n:n standardikanta.
- Lineaaristen kuvausten ja matriisien väliset vastaavuudet.
- Periaate - jos vektoriavaruuksien dimensiot samat niin lineaarinen kuvaus niiden välillä on injektio jos ja vain jos se on surjektio jos ja vain jos se on bijektio.
- Duaali, toinen duaali, duaalikanta, kuvauksen duaali, refleksiivisyys.
- Suorat summat - varsinkin äärelliset. Alimodulin komplementti.
- Multilineaariset kuvaukset, symmetriset, antisymmetriset, alternoivat kuvaukset. Determinantti ja sen ominaisuudet. Cramerin sääntö.

- R-modulin M alkioiden $a_1, \ldots, a_n$ lineaarinen kombinaatio on alkio muotoa
$$x = r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n,$$
missä $r_1, \ldots, r_n \in R$.

- Osajoukon $A \subset M$ virittämä alimoduli Span(A) koostuu lineaarisista kombinaatioista
$$x = r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n,$$
missä $r_1, \ldots, r_n \in R, a_1, \ldots, a_n \in A$. Se on (sisältyvyyden suhteen) pienin alimoduli, joka sisältää A:n.

- Jos Span$(A) = M$, A on modulin M virittäjäjoukko. Moduli on *äärellisviritteinen* jos sillä on äärellinen virittäjäjoukko.

- Alkion $x \in$ Span(A) esitys A:n alkioiden lineaarisena kombinaationa ei yleensä ole yksikäsitteinen. Se on yksikäsitteinen jos ja vain jos A on*vapaa joukko*. Joukko ei ole vapaa on sidottu.

- Vapaa virittäjäjoukko on *kanta*. Moduli jolla on kanta on vapaa. Jos kanta on äärellinen moduli on äärellisulotteinen. Voidaan osoittaa, että (kun R on vaihdannainen) kannan koko ei riipu kannan valinnasta. Jos kannan koko on tasan n moduli on n-ulotteinen. Merkitään $\dim M = n$.

- Moduli on n-ulotteinen jos ja vain jos se on isomorfinen modulin R^n kanssa.

- Yleisemmin moduli on vapaa jos ja vain jos se on isomorfinen modulin $R^{(A)}$ kanssa jollakin joukolla $\mathcal{A}$.

- Kanonisessa n-ulotteisessa modulissa R^n on määritelty niin sanottu standardikanta $(e_1, \ldots, e_n)$.

Seuraavat ominaisuudet pätevät vain vektoriavaruuksille eivätkä ole en yleisesti tosi jos kerroinrengas ei ole kunta

- Jokainen vektoriavaruus on vapaa. Jokainen äärellisviritteinen vektoriavaruus on äärellisulotteinen.

- Vektoriavaruuden osajoukko on sidottu jos ja vain jos jokin sen alkio voidaan esittää muiden avulla lineaarisena kombinaationa.

- Olkoon W vektoriavaruuden V aito aliavaruus. Tällöin jokainen W:n kanta voidaan täydentää V:n kannaksi. Jos V on äärellisulotteinen pätee $\dim W < \dim V$. Tekijäavaruus V/W on tällöin myös äärellisulotteinen ja
$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W.$$

5.2.3 Lineaariset kuvaukset ja matriisit

- Jos M, N ovat R-modulit, lineaarikuvausten joukko $L\colon M \to N$ on R-moduli $L(M, N)$. Tässä edelleenkin pitää olettaa R vaihdannaiseksi.

- Jos yllä $M = N$ modulissa $L(M, M) = L(M)$ on myös määritelty kertolasku, joka on kuvausten yhdistäminen. Tämä tekee $L(M)$:stä R-*algebran*, joka on monimutkaisin algebrallinen struktuuri tällä kurssilla - siinä yhdistyy moduli ja rengas.

- Jos $L\colon M \to N$ on lineaarinen, $\operatorname{Ker} L$ ja $\operatorname{Im} L$ ovat alimodulit. L on injektio jos ja vain jos $\operatorname{Ker} L = \{0\}$ on triviaali.

- Jos M on vapaa, lineaarikuvaus $L\colon M \to N$ määräytyy yksikäsitteisesti kun tunnetaan sen arvoja jonkun M:n kannan alkioissa.

- Jos sekä M että N ovat vapaat ja äärellisulotteiset, jokainen lineaarikuvaus $L\colon M \to N$ voidaan koodata *matriisina*. Vastaavuus kuvausten ja (sopivan kokoisten) matriisien välillä on tällöin bijektiivinen, mutta riippuu kantojen valinnasta.

- Täsmällisemmin - kiinnitetään M:ssä kanta $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ ja N:ssä kanta $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Tällöin saadaan vastavuus kuvausten $L\colon M \to N$ ja $(n \times m)$-matriisien välillä on kuvaus $\phi, \phi(L) = [L]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}$. Kuvaus $\phi\colon L(M, N) \to M(n \times m; R)$ on modulien välinen isomorfismi. Matriisi $[L]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}$ muodostetaan seuraavalla tavalla. Jokaisen M:n kannan alkio e_j esitetään kannassa $\mathbf{f}$ eli lineaarisena kombinaationa

  $$L(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i.$$

  Kertoimet $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ muodostavat matriisin j:nnen sarakkeen.

- Vaikka vastaavuus kuvauksen ja sen matriisin välillä riippuu kantojen valinnasta, tapa ajatella kuvaus ja matriisi samana oliona on erittäin hyödyllinen. Kuvaustulkinnan hyvä puoli on se, että kuvaus on invariantti otus, joka ei riipu kantojen valinnoista. Matriisien hyvä puoli on taas äärellisyys ja konkreettisuus. Usein saman todistuksen sisällä liikutaan tulkinnasta toiseen muutamankin kerran. Tämä helpottaa tarkasteluja mutta vaatii totuttelua.

- Matriisien kertolasku (”rivi kertaa sarake”) on määritelty niin, että se vastaa kuvausten yhdistämistä. Teknisellä tasolla - jos yllä $L'\colon N \to P$ on lineaarinen kuvaus, ja P:ssä kiinnitetään kanta $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_p)$, niin

  $$[L' \circ L]_{\mathbf{g},\mathbf{e}} = [L']_{\mathbf{g},\mathbf{f}} [L]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}.$$

- Erikoistapauksena saadaan kannanvaihtokaava. Jos M:ssä valitaan toinen kanta $\mathbf{e}'$ ja N:ssä toinen kanta $\mathbf{f}'$, niin

  $$[L]_{\mathbf{f}',\mathbf{e}'} = [\mathbf{f}' \mid \mathbf{f}][L]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}[\mathbf{e} \mid \mathbf{e}'].$$

  Tässä $[\mathbf{f}' \mid \mathbf{f}]$ ja $[\mathbf{e} \mid \mathbf{e}']$ ovat niin sanotut kannanvaihtomatriisit.

- Kannanvaihtomatriisi $[\mathbf{e} \mid \mathbf{e}']$ on identtisen kuvauksen $\mathrm{id}\colon M \to M$ matriisi $[\mathrm{id}]_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$. Toinen luonollinen tapa on ajatella, että kannanvaihtomatriisin alkiot a_{ij} saadaan kun kannan $\mathbf{e}'$ alkiot esitetään kannassa $\mathbf{e}$ eli

  $$e'_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i.$$

Kannanvaihtomatriisi on aina kääntyvä ja

$$[\mathbf{e} \mid \mathbf{e}']^{-1} = [\mathbf{e}' \mid \mathbf{e}].$$

Kääntäen jokainen kääntyvä matriisi voidaan tulkita kannanvaihtomatriisina (kts. Harjotus 7.2).

- Erityisesti jos M:llä on kannat $\mathbf{f}$ ja $\mathbf{e}$ ja $L\colon M \to M$ lineaarinen *endomorfismi*, niin matriisit $B = [L]_{\mathbf{e},\mathbf{e}}$ ja $A = [L]_{\mathbf{f},\mathbf{f}}$ ovat *similaariset* eli $B = XAX^{-1}$ jollakin kääntyvällä matriisilla X.

- Similaarisilla matriisilla on samat determinantti, ominaisarvot, karakteristinen polynomi, minimipolynomi jne.

- $(n \times m)$-kokoisten matriisien joukkoa merkitän $M(n \times m; R)$. Tämä on R-moduli, kun $n = m$ (neliömatriisit) jopa R-algebra. Kääntyvät $(n \times n)$-matriisit muodostavat tärkeän yleisen lineaarisen ryhmän $GL(n; R)$. Tämän ryhmän aliryhmiä sanotaan matriisiryhmiksi. Kurssilla tarkastellaan lähinnä tapaus $R = K$ on kunta.

- Tärkeät esimerkit matriisiryhmistä ovat erikoinen lineaarinen ryhmä $SL(n; K)$, unitaariset sekä ortogonaaliset ryhmät. Viimeisiä tarkastellaan sisätuloavaruuksien yhteydessä.

- Kun lähdetään $(n \times m)$ matriisista A se usein ajatellaan lineaarikuvauksena $L_A\colon R^m \to R^n$, $L_A(x) = Ax$. Tässä oikealla puoleella on matriisien kertolasku ja $x = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m$ ajatellaan "pystyvektorina". Toinen tapa ajatella L_A:ta on huomata, että se on juuri se lineaarinen kuvaus, jonka matriisi *standardikantojen suhteen* on juuri matriisi A.

- $n \times m$-matriisin jokainen sarake A^j ajatellaan R^n:n vektorina. Kaikki sarakkeet $A_1, \ldots, A_m$ virittävat R^n:n aliavaruuden $\mathrm{Col}(A)$. Samoin jokainen rivi A_i on R^m:n alkio ja rivit virittävät aliavaruuden $\mathrm{Row}(A)$.

Seuraavat tärkeät lineaaristen kuvausten ja matriisien ominaisuudet pätevät vain kun $R = K$ on kunta.

- Perusyhtälö - jos $L\colon V \to W$ on äärellisulotteisten vektoriavaruuksien välinen kuvaus, niin

$$\dim \operatorname{Im} L + \dim \operatorname{Ker} L = \dim V.$$

- Lineaarikuvaus kahden n-ulotteisen vektoriavaruuden välillä on isomorfismi jos ja vain jos se on injektio tai surjektio. Tätä sovelletaan usein seuraavalla tavalla - tiedetään, että avaruudet ovat samaa ulottuvuutta. Halutaan tietää, että yhtälöllä $L(x) = y$ on ratkaisu jokaisella $y \in W$. Tämä on sama asia kuin surjektiivisuus. Sen sijaan osoitetaan injektiivisyys. Siihen taas riittää tarkistaa, että ydin on triviaali.

- Edellisen versio matriiseille - neliömatriisi on kääntyvä jos ja vain jos sill on vasemmanpuoleinen tai oikeanpuoleinen käänteisalkio.

- $\dim \mathrm{Row}(A) = \dim \mathrm{Col}(A)$ kaikille matriiseille.

5.2.4 Duaaliavaruus

- Modulin M duaali on moduli $M^* = L(M, R)$.

- Jos M:llä on äärellinen kanta $(e_1, \ldots, e_n)$, duaalilla on *duaalikanta* $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$. Erityisesti tällöin $\dim M = \dim M^*$.

- Lineaarikuvaus $L\colon M \to N$ määrittelee duaalikuvauksen $L^* = N^* \to M^*$. Jos L:llä on matriisi A joiden kantojen suhteen, kuvauksella L^* on vastaavien duaalikantojen suhteen matriisina A:n transpoosi A^T.

- Kuvausten duaalioperaatio säilyttää yhteen- ja skalaarikertolaskun, mutta kääntää kertolaskun järjestystä. Toisin sanoen $(L'L)^* = L^*L'^*$. Matriistasolla se tarkoittaa sitä, että $(AB)^T = B^T A^T$.

- Toisella duaalilla M^{**} on yhteyksiä alkuperäiseen moduliin. On olemassa kanoninen kuvaus $\Phi\colon M \to M^{**}$, joka on määritelty ehdolla $\Phi(m)(L) = L(m)$. Kun M on vapaa ja äärellisulotteinen , tämä kuvaus on isomorfismi.

5.2.5 Suorat summat

- Erittäin tärkeä konstruktio, jota käytetään myöhemmin jatkuvasti kun tutkitaan vektoriavaruuksien välisiä lineaarisia kuvauksia. Perustavoittena on jakaa avaruus aliavaruuksiensa suoraksi summaksi eli. Jos nämä aliavaruudet ovat esimerkiksi L-invariantteja jonkun kuvauksen L suhteen, saadaan kuvaus ikään kuin hajotettua ”pienimpiin palasiin”, joita on helpompaa luokitella ja käsitellä kuin alkuperäinen olio.

- Kahden alimodulin summa

$$N_1 + N_2 = \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in N_1, n_2 \in N_2\}$$

on aina alimoduli. Jos $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ on triviaali moduli, niin summa on *suora* ja merkitän $n_1 \oplus N_2$. Mielenkiintoisin tapaus on kun $N_1 \oplus N_2 = M$. Summa on suora jos ja vain jos jokainen summan $N_1 + N_2$ alkio voidaan kirjoittaa muodossa $n_1 + n_2, n_1 \in N_1, n_2 \in N_2$ *yksikäsitteisellä tavalla.*

- Alimoduli $N \subset M$ on *suora tekijä* jos on olemassa alimoduli $N' \subset M$ siten, että summa $N + N'$ on suora ja $N \oplus N' = M$. Alimoduli N' sanotaan tällöin N:n *komplementiksi.*

- Alimodulilla ei välttämättä ole komplementtia. Jos sellainen on, se ei yleensä ole yksikäsitteinen. Esimerkiksi tasossa suoran komplementti on mikä tahansa toinen suora.

- Vektoriavaruuden jokaisella aliavaruudella kuitenkin aina on komplementti. Tämä on hyvin olennaista vektoriavaruuksien teorian kannalta.

- Hajotelmaan $M = N \oplus N'$ liittyy "kanoninen projektio" $p\colon M \to N$. Tämä määritellään seuraavasti - esitetään alkio $m \in M$ muodossa $m = n + n'$, $n \in N, n' \in N$ ja asetetaan $p(m) = n$.

- Suoran summan käsitettä voidaan yleistää äärellisen monen tai jopa äärettömään monen alimodulin tapaukseen. Perheen $(N_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ summa koostuu niin sanotuista äärelliskantajaisten perheiden summista $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x_\alpha$, missä $x_\alpha \in N_\alpha$. Äärelliskantajaisuus tarkoittaa sitä, että summattavista alkioista vain äärellisen monta eroaa nollasta.

- (Mahdollisesti) ääretön summa $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x_\alpha$ on suora jos ja vain jos jokainen sen alkio on *tasan yhden* äärelliskantajaisen perheen $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x_\alpha$ summan arvo.

- Yllä kyse "sisäisestä suorasta summasta". Yleisempi käsite on ulkoinen suora summa. Jos $(N_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ on mielivaltainen perhe moduleita, voidaan konstruoida suora summa
$$\oplus_{\alpha\in\mathcal{A}} N_\alpha.$$
Se sisältää modulit N_α alimoduleina (isomorfiaa vaille) ja on tällöin niiden sisäinen suora summa. Suora summa on tällä tavalla määritelty isomorfian vaille yksikäsitteisesti.

5.2.6 Multilineaarisuus ja determinantti

- Useamman muuttujan kuvaus (jokainen muuttuja jonkun R-modulin alkio) on lineaarinen jos se on lineaarinen jokaisen muuttujan suhteen.

- Tärkeät luokat ovat symmetriset, antisymmetriset ja alternoivat multilineaariset kuvaukset.
- Jos M on n-ulotteinen, alternoivien n-muotojen $F\colon M^n \to R$ muodostama moduli on 1-ulotteinen.
- Tästä seuraa, että on olemassa tasan yksi kuvaus $\det\colon M(n\times n; R) \to R$ joka on multilineaarinen ja alternoiva matriisin sarakkeiden suhteen ja $\det I_n = 1$.
- Determinantti voidaan laskea kehittämällä rivin tai sarakkeen suhteen. Lisäksi $\det A^T = \det A$.
- Determinantti säilyttää kertolaskun eli
$$\det(AB) = \det A \det B.$$
- Matriisi on kääntyvä jos ja vain jos sen determinantti on kääntyvä R:ssä. Erityisesti jos $R = K$ on kunta, matriisi on kääntyvä jos ja vain jos sen determinantti eroaa nollasta
- Cramerin sääntö kertoo miten käänteismatriisi voidaan esittää determinanttien avulla.
- Koska similaaristen matriisien determinantin ovat samat, voidaan märitellä kuvauksen $L\colon M \to M$ (missä M äärellisulotteinen) determinantti. Se on sama kuin minkä tahansa L:n matriisin (saman M:n kannan suhteen) determinantti.

Luvun 3 tärkeimmät käsitteet ja avainsanat in a nutshell:
- Invariantti aliavaruus, ominaisarvo, ominaisvektorit, diagonalisoituva kuvaus/matriisi. Karakteristinen yhtälä, yläkolmiomatriisi, algebrallisesti suljettu kunta ja kunnan algebrallinen sulkeuma.
- Abstrakti algebrallinen polynomi, polynomialgebra ja sen universaali ominaisuus, jaollisuusteoriaa polynomialgebrassa. Polynomit juuret.
- Karakteristinen polynomi ja minimipolynomi. Nilpotentit operaattorit. Syklinen kanta. Jordanin lause, Jordanin solu, Jordanin normaali muoto. Juurialiavaruudet.

5.2.7 Invariantit aliavaruudet ja ominaisarvot

Tässä sektiossa tarkasteltiin vain vektoriavaruuksia ja niiden operaattoreja $L\colon V \to V$

- Aliavaruus W on L-invariantti jos $L(W) \subset W$.

- Mitä enemmän invariantteja aliavaruuksia L:llä sitä helpompi luokitella se. Erityisen helppo tapaus on kun V on suora summa epätriviaalista invariantteista aliavaruuksista.

- Ominaisvektori on vektori jonka virittämä aliavaruus L-invariantti. Perinteisempi määritelmä - on olemassa $\lambda \in K$ siten, että $L(x) = \lambda x$.

- Kunnan alkio λ joka toteuttaa yhtälön $L(x) = \lambda x$ jollakin $x \neq 0$ on kuvauksen ominaisarvo.

- λ on ominaisarvo jos ja vain jos kuvaus $L - \lambda\,\mathrm{id}$ ei ole injektio. Tämä on sama asia kuin $\det(L - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$. Tähän perustuu tunnettu ominaisarvojen laskemisen menetelmä. Yleensä kuvauksen L sijaan otetaan jokin sen matriisi A. Determinanttien teoriasta seuraa, että yhtälö $\det(A - \lambda I_n) = 0$ on n-asteinen *polynomiyhtälö*.

- Tämä antaa voimakkaan motivaation tutkia ja käyttää hyväksi *polynomeja* kunnan yli.

- Operaattorin ominaisarvoon λ liitetään ominaisarvoaliavaruus

$$V_\lambda = \{x \in V \mid L(x) = \lambda x\}.$$

- Olkoot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ operaattorin L erilaiset ominaisarvot. Tällöin vastaavat ominaisaliarvoaliavaruus muodostavat *suoran* summan.

- Jos tämä summa on koko avaruus, operaattori on *diagonalisoituva.* Ekvivalentti määritelmä - avaruudella on kanta joka koostuu L:n ominaisarvoista.

- Matriisi on diagonalisoituva jos se on kuvauksena diagonalisoituva. Ekvivalentisti $A = XDX^{-1}$ on diagonalimatriisi jollakin kääntyvällä X.

- Kuvaus on diagonalisoituva jos ja vain jos sen matriisi missä tahansa kannassa on diagonalisoituva. Erityisesti on olemassa kanta, jonka suhteen kuvauksen matriisi on diagonaalimatriisi.

- Jos kuvauksella on $\dim V$:n verran erilaisia ominaisarvoja, se on varmasti diagonalisoituva.

- Suurin osa kuvauksista ei ole diagonalisoituva.

- Jos skalaarikunta K on *algebrallisesti suljettu*, jokaisella operaattorilla K-vektoriavaruuden suhteen on ainakin yksi ominaisarvo. Lisäksi se voidaan esittää yläkolmiomatriisina jossakin kannassa.

- Kunta on algebrallisesti suljettu jos jokaisella (ei-vakio) polynomilla $K \to K$ on ainakin yksi juuri. Kompleksilukujen kunta $\mathbb{C}$ on algebrallisesti suljettu. Reaalilukujen kunta taas ei ole.

- Vaikka kunta ei olisi algebrallisesti suljettu, joskus tuloksia saadaan kun tarkastellaan jokin tilanne isommassa kunnassa, joka on algebrallisesti suljettu. Juuri tällä tavalla kurssilla todistettaan esimerkiksi Cayley-Hamiltonin Lausetta. Voidaan osoittaa, että jokainen kunta sisältyy johonkin algebrallisesti suljettuun kuntaan.

- Teknisella tasolla edellinen havainto realisoidaan, kun tarkastellaan kuvausten sijaan matriiseja. Jos matriisit kertoimet ovat kunnassa K ja K' on isompi kunta eli $K \subset K'$, voidaan matriisi ajatella K'-kertoimisena ja soveltaa K'-matriisien teoriaa.

- Esimerkkinä edellisestä mainitaan, että jokaisella $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden operaattorilla $L\colon V \to V$ on korkeintaan 2-ulotteinen L-invariantti aliavaruus. Tämä johtuu pohjimmiltaan siitä, että $\mathbb{C}$:n suhteen L:llä (joka ajatellaan matriisina) olisi ominaisarvo ja $\mathbb{C}$ on 2-ulotteinen $\mathbb{R}$:n suhteen.

- Voidaan osoittaa, että jokainen kunta on jonkun algebrallisesti suljetun kunnan alikunta.

5.2.8 Polynomialgebra ja sen sovellukset

- Yksi syy tutkia polynomit on mainittu aikaisemmin - niiden avulla lasketaan ominaisarvot.

- Toinen huomattava syy on seuraava. Operaattorien $L\colon V \to V$ muodostama joukko on K-algebra. Jos L on sellainen operaattori, sen potenssit L^k ovat määriteltyjä. Voidaan myös kertoa ne K:n alkioilla eli skalaareilla ja laskea yhteen. Toisin sanoen jos $p = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ on polynomilauseke, ”muuttujan” X paikalle voidaan ”sijoittaa” L. Tällöin saadaan toinen operaattori $p(L)$.

- Edellinen pykälä paljastaa olennaisen syyn, miksi polynomialgebran (ja sen yleistykset) ovat välttämätön työkalu missä tahansa kontekstissa, jossa esiintyvät K-algebrat. Teknisellä tasolla puhutaan polynomialgebran universaalista ominaisuudesta, joka sovelletaan sijoitushomomorfismin avulla.

- Yhteinen polynomipainoteinen näkökulma algebrojen maailmaan saadaan vasta kun luovutaan tavasta ajatella polynomi kuvauksena ja sen sijaan tarkastellaan polynomit abstrakteina algebrallisina olioina.

- Nämä oliot muodostavat ääretönulotteisen K-algebran $K[X]$. Sen kannan muodostavat muuttujasymbolin X potenssit $1, X, X^2, \ldots, X^n$.

- Jokainen nollasta eroava polynomi on muotoa $p = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$, missä $a_n \neq 0$. Luonnollinen luku n on tällöin polynomin aste. Jos $a_n = 1$ puhutaan pääpolynomista.

- Renkaana polynomialgebra on pääideaalirengas. Tämä tarkoittaa sitä, että jokainen sen ideaali on yhden polynomin virittämä. Tämä on puolestaan seuraus jakoyhtälöstä **??**.

- Polynomialgebrassa voidaan kehittää jaollisuuden teoriaa. Polynomi on jaoton, jos ainoat sen tekijät ovat vakiopolynomit, polynomi itse ja näiden tulot. Jokainen polynomi voidaan esittää jaottomien polynomien tulona oleellisesti yksikäsitteisellä tavalla.

- Kunnan K tai yleisemmin K-algebran $K[X]$ alkio x on polynomin $p \in K[X]$ juuri jos $p(x) = 0$ (sijoitushomomorfismi!). Kunnassa polynomilla on korkeintaan polynomin asteen verran juureja, voi olla vähemmän. Algebrassa tämä ei välttämättä päde.

- p:n juuren x kertaluku k on suurin luku jolla $(X - x)^k$ jakaa p:n.

- Kunta K siis algebrallisesti suljettu jos jokaisella polynomilla $p \in K[X]$ ainakin yksi juuri. Tästä seuraa paljon vahvempi väite - p voidaan kirjoittaa tällöin ensimmäisen asteen polynomien tulona.

- Koska $\mathbb{C}$ on algebrallisesti suljettu, erityisesti jokainen polynomi $\mathbb{C}$:ssä voidaan hajottaa ensimmäisen asteen tekijöihin. Tästä puolestaan seuraa, että $\mathbb{R}$:ssä ainoat jaottomat polynomit ovat ensimmäistä ja toista astetta.

- Lineaarisen operaattorin $L\colon V \to V$ minimipolynomi on asteeltaan pienin nollasta eroava polynomi m_L jolle $m_L(L) = 0$. Cayley-Hamiltonin lauseen nojalla $\dim m_L \leq \dim V$.

- L:n karakteristinen polynomi on $\chi_L = \det(X \operatorname{id} - L)$. Sen aste on aina $n = \dim V$ ja sen juuret ovat täsmälleen L:n ominaisarvot. Ominaisarvon algebrallinen kertaluku on sen kertaluku karakteristisen yhtälön juurena. Se on aina suurempi tai yhtä suuri kuin ominaisarvon geometrinen kertaluku eli $\dim V_\lambda$.

- Cayley-Hamilton - $\chi_L(L) = 0$.

- Minimipolynomilla ja karakteristisella polynomilla samat juuret ja itse asiassa samat jaottomat tekijät.

- Jordanin $(n \times n)$-kokoinen λ-solu (missä $\lambda \in K$) on $(n \times n)$-matriisi

$$N(\lambda, n) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

  Matriisi on normaalissa Jordanin muodossa jos se on lohkomatriisi

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix},$$

  missä jokainen A_i on Jordanin solu.

- Jordanin Lause - Jos operaattorin L karakteristinen yhtälö jakautuu ensimmäisen asteen tekijöihin se voidaan esittää Jordanin normaalissa muodossa. Lisäksi tällainen esitys on yksikäsitteinen solujen permutaatiota vaille. Lause on erityisesti voimassa kaikille operaattoreille algebrallisesti suljetun kunnan yli (esim. $\mathbb{C}$).

- Jordanin lause todistetaan ensin *nilpotentteille* operaattoreille eli sellaisille, joiden minimipolynomi on muotoa X^k.

- Matkan varrella tarkastellaan yleistetyt ominaisarvoavaruudet eli *juuriavaruudet*

$$V^\lambda = \{v \in V \mid (L - \lambda \operatorname{id})^k(v) = 0, k \in \mathbb{N}\},$$

  missä λ on ominaisarvo. Nämä avaruudet muodostavat suoran summan ja jos L toteuttaa Jordanin lauseen oletuksia, tämän summan arvo on koko avaruus.

- Todistuksessa käytetään hyväksi myös seuraavaa keskenään jaottomien polynomien ominaisuutta - jos $p_1, \ldots, p_k$ ovat keskenään jaottomat polynomit, niin 1 voidaan esittää niiden lineaarisena kombinaationa eli muodossa
$$1 = q_1 p_1 + \ldots + q_n p_n,$$
missä $q_1, \ldots, q_n$ ovat polynomit.

- Seurauksena saadaan diagonalisoituvuuden kriteeri - operaattori on diagonalisoituva jos ja vain jos sen minimipolynomin jokainen juuri on yksinkertainen.

Luvun 4 tärkeimmät käsitteet ja avainsanat in a nutshell:
- Konjugaattikonstruuktiot, 1/2 ja 3/2-lineaariset kuvaukset, Hermittinen muoto, sisätulo, positiivisesti definiitti, posiitivisesti semidefiniitti. Ortogonaaliset ja ortnormaalit joukot ja kannat. Gram-Schmidt. Ortogonaalinen komplementti.
- Kuvauksen / matriisin adjungaatti. Unitaarisuus ja ortogonaaliset. Normaalit kuvaukset/matriisit. Diagonalisoituvuus ortonormaalissa kannassa. Itseadjungoidut ja symmetriset kuvaukset/matriisit.
- Polaarihajotelma.

5.2.9 Sisätulo ja Hermittiset muodot

- Sisätulot tarkastellaan vain $\mathbb{R}$-ja $\mathbb{C}$-kertoimisissa vektoriavaruuksissa.

- $\mathbb{C}$-sisätulon määritelmässä keskeisen roolin näyttelee *konjugaattioperaatio* $z \mapsto \overline{z}$.

- $\mathbb{C}$-vektoriavaruuden V konjugaatti $\overline{V}$ on sama joukkona ja yhteenlaskun kohdalla kuin V mutta skalaarikertolasku on
$$z \cdot v = \overline{z} v,$$
missä oikealla puoleella skalaarikertolasku V:ssä.

- Kuvaus $L\colon V \to W$ on puolilineaarinen jos se on lineaarinen kuvauksena $L\colon V \to \overline{W}$. Käytännössä se tarkoittaa, että L on muuten lineaarinen, paitsi että skalaarikertolaskun ehto on $L(zv) = \overline{z} L(v)$.

- Kuvaus $F\colon V \times V \to K$ on 3/2-lineaarinen jos se on lineaarinen ensimmäisen muuttujan suhteen ja 1/2-lineaarinen toisen muuttujan suhteen.

- Hermittinen muoto on 3/2-lineaarinen kuvaus $F\colon V \times V \to K$ joka toteuttaa ehdon $F(v,w) = \overline{F(w,v)}$.
- Sisätulo on Hermittinenn muoto $\langle , \rangle$ joka on lisäksi positiivisesti definitti eli $\langle x, x\rangle > 0$ kaikilla $x \in V$, $x \neq 0$. Jos epäyhtälö pätee vain muodossa $\langle x, x\rangle \geq 0$ kaikilla $x \in V$, puhumme positiivisesti semidefinitistä muodosta.
- Kun äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa V on kiinnitetty jokin sisätulo $\langle , \rangle$ mikä tahansa avaruuden Hermittinen muoto F voidaan esittää muodossa
$$F(v,w) = \langle Av, w\rangle,$$
missä A on niin sanottu *itseadjungoitu matriisi* eli matriisi jolle $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ kaikilla indekseillä. Tälläinen matriisi on aina diagonalisoituva (jopa ortnormaalissa kannassa). Jos sen ominaisarvot ovat ei-negatiivisia vastaava muoto on positiivisesti semidefinitti, jos ne ovat aidosti positiiviset, niin muoto on positiivisesti definiitti, eli (jokin toinen) sisätulo.
- Sisätulon avulla voidaan avaruudessa määritellä geometriset käsitteet - etäisyys, kulmat. Erityisesti sisätulo määrittelee normin.
- Sisätuloavaruuden osajoukko A on ortogonaalinen jos $x \cdot y = 0$ kaikilla $x, y \in A, x \neq y$. Jos lisäksi $|x| = 1$ kaikilla $x \in A$, A on ortonormaali.
- Gram-Schmidt - jokainen kanta voidaan muuttaa ortonormaaliksi tietyn prosessin avulla.
- Aliavaruuden W ortogonaalinen komplementti $W^\perp$ määritellään
$$W^\perp = \{v \in V \mid v \cdot w = 0 \text{ kaikilla } w \in W\}.$$
Tällöin (avaruudet äärellisulotteisia!) $W \cdot W^\perp = V$.

5.2.10 Adjungaatti

- Jos $L\colon V \to W$ on lineaarinen operaattori sisätuloavaruuksien välillä, niin on olemassa yksikäsitteinen lineaarinen $L^*\colon W^* \to V^*$ siten, että
$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, L^* w\rangle$$
kaikilla v, w. L^* on L:n *adjungaatti.*
- Jos L:n matriisi ortonormaalien kantojen suhteen on A, niin L^*:n matriisi samojen kantojen suhteen on $A^* = \overline{(A^T)} = \overline{A}^T$.

- Jos W on invariantti L:n suhteen, ortogonaalinen komplementti $W^\perp$ on L^*-invariantti.
- Lineaarinen kuvaus on unitaarinen (ortogonaalinen kun $K = \mathbb{R}$) jos se säilyttää sisätulot, ekvivalentisti säilyttää normit, ekvivalentisti kuvaa ortnormaalit joukot ortonormaaleiksi. Kuvaus on unitaarinen jos ja vain jos $L^* = L^{-1}$. Sama pätee matriiseille.
- Matriisi on unitaarinen jos ja vain jos sen sarakkeet (rivit) muodostavat K^n:n ortonormaalin kannan (pistetulon suhteen)
- $S0(2)$ koostuu reaalisesta matriiseista jotka ovat muotoa

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

- Kuvaus/matriisi diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa, jossa avaruudella on ortonormaali kanta, joka koostuu kuvauksen ominaisvektoreista.
- Kun $K = \mathbb{C}$ kuvaus/matriisi diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa jos ja vain jos kuvaus/matriisi on normaali eli $L^*L = LL^*$. Unitaariset ja itseadjungoidut kuvaukset /matriisit ovat normaaleja.
- Unitaarisen kuvauksen ominaisarvot ovat itseisarvoltaan 1.
- Itseadjunoidun kuvauksen ominaisarvot ovat reaalisia.
- Kun $K = \mathbb{R}$ kuvaus/matriisi on diagonalisoituva ortnormaalissa kannassa jos ja vain jos se on symmetrinen.
- Jos L on normaali ja W L-invariantti, se on myös L^*-invariantti.

5.2.11 Polaarihajotelma

- Jokaisella posiitivisesti semidefinitilla matriisilla S yksikäsitteinen positiivisesti semidefinitti neliöjuuri $T = \sqrt{S}$, $T^2 = S$.
- Operaattorin L polaarihajotelma on $L = US$, missä U unitaarinen ja S positiivisesti semidefinitti. Itse asiassa $S = \sqrt{L^*L}$ on aina yksikäsitteinen. Jos L on kääntyvä, U on myös yksikäsitteinen.