4.2 Adjungaatti ja unitaarisuus

Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Tiedetään, että tällöin sen duaali V^* on samaa ulottuvuutta kuin V eli erityisesti isomorfinen sen kanssa. Yleisesti tämä isomorfismi ei ole kanoninen, vaan on "satunnainen" eli riippuu kantojen valinnasta.
Sisätuloavaruudessa on olemassa kanoninen tapa yhdistää V sen duaaliavaruuteen V^*. Valitettavasti yleisessä tapauksessa se on ainoastaan puolilineaarinen isomorfismi, eli on lineaarinen isomorfismi vain $\mathbb{R}$-sisätulon tapauksessa.
Olkoon $w \in V$, missä V sisätulolla $\langle , \rangle$ varustettu K-vektoriavaruus. Määritellään kuvaus $L_w \colon V \to K$ kaavalla $L_w(v) = \langle v, w \rangle$. Koska sisätulo on lineaarinen ensimmäisen muuttujan suhteen, L_w on lineaarinen jokaisella $w \in V$. Toisin sanoen $L_w \in V^*$ kaikilla $w \in V$. Saadaan siis kuvaus $\Phi \colon V \to V^*$,

$$\Phi(w) = L_w.$$

Propositio 4.16. *Kuvaus $\Phi \colon V \to V^*$ on puolilineaarinen injektio. Jos V on äärellisulotteinen, se on bijektio, eli isomorfismi $V \to \overline{V^*}$.*

Todistus. Tarkistetaan puolilineaarisuus. Kaikilla $w, w', v \in V$ ja $\lambda \in K$ saadaan

$$\Phi(w+w')(v) = L_{w+w'}(v) = \langle v, w+w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle = \Phi(w)(v) + \Phi(w')(v) = (\Phi(w) + \Phi(w'))(v),$$

$$\Phi(\lambda w)(v) = \langle v, \lambda w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle = (\overline{\lambda} \Phi(w))(v).$$

Näin ollen Φ on puolilineaarinen, erityisesti lineaarinen kuvauksena $V \to \overline{V^*}$. Helposti nähdään, että avaruuden ja sen konjugaattiavaruuden dimensiot ovat samat (tarkista!). Erityisesti, jos V on äärellisulotteinen, niin myös on $\overline{V^*}$ ja

$$\dim \overline{V^*} = \dim V^* = \dim V.$$

Näin ollen, jos osoitamme, että Φ on injektio, dimensiosyistä seuraa, että se on äärellisulotteisessa tapauksessa jopa bijektio. Riittää siis näyttää injektivisyys.
Olkoon $w \in W$ sellainen, että $\Phi(w) = 0$. Tällöin siis kaikilla $v \in V$

$$\langle v, w \rangle = L_w(v) = \Phi(w)(v) = 0.$$

Erityisesti $\langle w, w \rangle = 0$, mistä seuraa, että $w = 0$. $\square$

Edellisestä propositiosta seuraa, että, sisätuloavaruuden V olleessaan äärellisulotteinen, jokainen lineaarinen kuvaus $V \to K$ on muotoa $L_w, v \mapsto$

$\langle v, w\rangle$ jollakin yksikäsitteisellä w.
Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus, missä sekä V, että W ovat sisätuloavaruuksia.
Kuten yleisesti pätee, on olemassa duaalikuvaus $L^*\colon W^* \to V^*$, joka on erityisesti lineaarinen kuvaus. Tällöin se on myös lineaarinen konjugaattien suhteen, eli jos ajattelemme L^* kuvauksena $L^*\colon \overline{W^*} \to \overline{V^*}$, niin se on edelleenkin K-vektoriavaruuksien välinen lineaarinen kuvaus.
Oletamme, että sekä V, että W ovat äärellisulotteiset. Tällöin on olemassa puolilineaariset bijektiot $\Phi_V\colon V \to \overline{V^*}$ ja $\Phi_W\colon W \to \overline{W^*}$. Tarkastellaan kuvausta

$$L' = \Phi_V^{-1} \circ L^* \circ \Phi_W\colon W \to V.$$

Puolilineaarisen bijektion käänteiskuvaus on selvästi myös puolilineaarinen, joten Φ_V^{-1} on puolilineaarinen. Samoin helposti nähdään, että puolilineaarisen ja lineaarisen kuvauksen yhdistelmä on puolilineaarinen ja kahden puolilineaarisen kuvauksen yhdistelmä on lineaarinen. Näin ollen $\Phi_V^{-1} \circ L^*$ on puolilineaarinen, joten $L' = \Phi_V^{-1} \circ L^* \circ \Phi_W$ on lineaarinen kuvaus. Huomaa, että tässä käsittelemme L^* kuvauksena $\overline{W^*} \to \overline{V^*}$, mutta näin tulkittuna se on edellenkin lineaarinen.
Karakterisoidaan L' ilman viittauksia duaaliavaruuksiin. Olkoot $v \in V, w \in W$. Tällöin duaalikuvauksen määritelmän mukaan $(L^* \circ \Phi_W(w)) = (\Phi_W(w) \circ L)$, joten

$$(L^* \circ \Phi_W(w))(v) = (\Phi_W(w) \circ L)(v) = \Phi_W(w)(L(v)) = \langle Lv, w\rangle.$$

Toisaalta $L^* \circ \Phi_W = \Phi_V \circ L'$ ja

$$(\Phi_V \circ L')(w)(v) = \Phi_V(L'w)(v) = \langle v, L'w\rangle.$$

Saadaan siis yhtälö

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, L'w\rangle.$$

Tämä karakterisoi kuvauksen L', jonka konstruoimme. Koska L' on isomorfioita vaille duaalikuvaus L^*, se merkitään yleensä kirjallisuudessa samalla symbolilla L^* ja kutsutaan L:n *adjungaatiksi* (engl. adjoint). Olemme todistaneet seuraavan lemman olemassaolo-puolen.

Lemma 4.17. *Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus, jossa V ja W ovat äärellisulotteiset sisätuloavaruudet. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen lineaarinen kuvaus $L^*\colon W \to V$ siten, että kaikilla $v \in V$ ja $w \in W$ pätee*

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, L^*w\rangle.$$

Tämä kuvaus sanotaan L:n adjungaatiksi.

Todistus. Olemassaolo todistettiin yllä. Periaatteessa yksikäsitteisyys voidaan nähdä käymällä läpi samoja välivaiheita, sillä olemme itse asiassa osoittaneet, että yhtälö

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, L'\rangle.$$

voidaan kirjoittaa muotoon

$$(L^* \circ \Phi_W)(w)(v) = (\Phi_V \circ L')(w)(v)$$

joten sen on voimassa kaikilla $v \in V$ ja $w \in W$ jos ja vain jos $L^* \circ \Phi_W = \Phi_V \circ L'$. Tästä seuraa, koska Φ_V tiedetään olevan bijektio, että $L' = \Phi_V^{-1} \circ L^* \circ \Phi_W$ on yksikäsitteisesti määrätty. □

Tutkitaan seuraavaksi L:n ja sen adjungaatin matriisien yhteyksiä. Olkoot $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ ja $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ vastaavasti V:n ja W:n **ortonormaalit** kannat. Olkoon $A = [L]_{\mathbf{f},\mathbf{e}} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n}$ L:n esitys näissä kannoissa. Määritelmän mukaan tämä tarkoittaa sitä, että

$$L(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i.$$

kaikilla $j = 1, \ldots, n$. Lemman 4.13 nojalla jokaisella $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$ pätee

$$a_{ij} = \langle L(e_j), f_i\rangle.$$

Adjungaatin määritelmän nojalla saadaan

$$a_{ij} = \langle L(e_j), f_i\rangle = \langle e_j, L^*(f_i)\rangle,$$

joten, sisätulon ominaisuuksien nojalla

$$\langle L^*(f_i), e_j\rangle = \overline{a_{ij}}. \tag{4.18}$$

Toisaalta olkoon $B = [L^*]_{\mathbf{e},\mathbf{f}} = (b_{ij})_{i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n}$. Taas määritelmän nojalla pätee

$$L^*(f_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j, \text{ joten}$$

$$b_{ji} = \langle L^*(f_i), e_j\rangle.$$

Vertamalla tämä tulos yhtälöön (4.18) saadaan siis $b_{ji} = \overline{a_{ij}}$. Toisin sanoen adjungaatin matriisi on saatu alkuperäisen kuvauksen matriisista transponoimalla ja ottamalla sen jälkeen jokaisesta siinä esiintyvästä alkiosta kompleksisen konjugaatin.

Määritelmä 4.19. *Olkoon* $A = (a_{ij}) \in M(n \times m; K)$ *matriisi. Sen konjugaatti* $\overline{A}$ *on* $(n \times m)$*-kokoinen matriisi, jolle pätee* $\overline{A}_{ij} = \overline{a_{ij}}$.
Matriisin A *adjungaatti* A^* *on* $m \times n$*-kokoinen matriisi* $\overline{(A^T)} = (\overline{A})^T$.

Helposti nähdään (tarkista!), että konjugaattikuvaus $A \mapsto \overline{A}$ on K-vektoriavaruuden $M(n \times m; K)$ puolilineaarinen isomorfismi, jonka käänteiskuvaus on konjugaattikuvaus itse. Lisäksi tämä operaatio säilyttää matriisien kertolaskun eli jos B on $(m \times p)$-kokoinen matriisi, niin

$$\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}.$$

Erityisesti, jos tämä operaatio tarkastellaan algebrassa $M(n \times n; K)$, niin se säilyttää neliömatriisien kertolaskun ja $\overline{I_n} = I_n$.
Koska adjungaatti on yhdistelmä transpoosista ja konjugaatista, operaatio $A \mapsto A^*$ on puolilineaarinen isomorfismi vektoriavaruudessa $M(n \times m; K)$. Lisäksi, koska transpoosi vaihtaa kertolaskun järjestystä, kaikille $A \in M(n \times m; K)$ ja $B \in M(m \times p; K)$ pätee

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

Tietysti, jos $K = \mathbb{R}$, niin adjungaatti on sama asia kuin transpoosi.
Olemme siis näyttäneet seuraava lemma todeksi.

Lemma 4.20. *Olkoon* $L\colon V \to W$ *sisätuloavaruuksien* V *ja* W *välinen lineaarinen kuvaus. Olkoot* $\mathbf{e}$ *ja* $\mathbf{f}$) *vastaavasti* V*:n ja* W*:n ortonormaalit kannat. Olkoon* $A = [L]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}$ L*:n matriisi näiden kantojen suhteen- Tällöin* L*:n adjungatti-kuvauksen* L^* *matriisi* $[L^*]_{\mathbf{e},\mathbf{f}}$ *samoissa kannoissa on* A*:n adjungaatti* A^*.

Panna merkille, että tulos on voimassa vain **ortonormaalien**, ei mielivaltaisten, kantojen suhteen.
Sisätuloavaruus V voidaan ajatella uudentyyppisen matemaattisen struktuurin edustajana. Se on sisätulon tyyppi, joka on siis formaalisti pari $V, (\langle, \rangle))$, jossa $V = (V, +, \cdot)$ on vektoriavaruus ja $\langle, rangle$ sisätulo V:ssä.
Aina kun tarkastelun kohteeksi vastaan tulee jokin uusi abstrakti struktuurin tyyppi nykymatematiikan "hyviin tapoihin" kuuluu myös, että mietitään mitkä ovat tämän tyypin edustajin väliset *morfismit* eli struktuuria säilyttävät kuvaukset.

Määritelmä 4.21. *Olkoot* V *ja* W *sisätuloavaruudet. Lineaarinen kuvaus* $L\colon V \to W$ *on unitaarinen, jos kaikilla* $v, w \in V$ *pätee*

$$\langle Lv, Lw \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Propositio 4.22. *Olkoot V ja W äärellisulotteiset sisätuloavaruudet ja olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus.*
Tällöin seuraavat ehdot vat yhtäpitäviä.

1. *L on unitaarinen.*

2. *L säilyttää normit eli jokaisella $v \in V$ pätee*
$$|Lv| = |v|\,.$$

3. *L kuvaa ortonormaalit joukot ortonormaaleksi joukoiksi.*

4. *Olkoon $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ jokin V:n ortonormaali kanta. Tällöin jono $\mathbf{f} = (Le_1, \ldots, Le_n)$ on myös ortonormaali.*

Erityisesti jokainen unitaarinen kuvaus on injektio.

Todistus. (1)⇒ (2). Asetetaan unitaarisuuden määritelmässä $v = w$. Tällöin saadaan
$$|Lv|^2 = \langle Lv, Lv\rangle = \langle v, v\rangle = |v|^2\,.$$
Ottamalla molemmista puolesta neliöjuuri, saadaan väite.
(2)⇒ (1). Käänteistä väitettä varten tarvitsemme tavan esittää sisätulo normin avulla. Helposti nähdään laskemalla suoraan, että kaikilla $v, w \in V$, missä V on sisätuloavaruus, pätee
$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(|u + v, u + v|^2 - |u - v|^2),$$
jos V $\mathbb{R}$-kertoiminen ja
$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(|u + v, u + v|^2 + i\,|u + iv|^2 - (1 + i)(|u|^2 + |v|^2)),$$
jos V $\mathbb{C}$-kertoiminen. Jos oletetaan, että (2) on tosi, näiden avulla saadaan (1). Yksityiskohdat harjoitustehtävänä.
(1)⇒(3). Jos L säilyttää sisätulon ja $A \subset V$ on ortonormaali, niin kaikilla $a, b \in A, a \neq b$ pätee
$$\langle La, Lb\rangle = \langle a, b\rangle = 0$$
ja, koska (1) implikoi (2), jokaisella $a \in A$ pätee
$$|La| = |a| = 1.$$
Näin ollen $L(A)$ on myös ortonormaali.
(3)⇒(4). Triviaalia.

(4)⇒(1). Oletetaan, että $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ on jokin V:n ortonormaali kanta ja jono $\mathbf{f} = (Le_1, \dots, Le_n) = (f_1, \dots, f_n)$ on myös ortonormaali. Olkoot $v, w \in V$. Esitetään molemmat vektorit kannassa $\mathbf{e}$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i,$$

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i.$$

Tällöin, koska $\mathbf{e}$ on ortonormaali, pätee

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Toisaalta

$$L(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i f_i,$$

$$L(w) = \sum_{i=1}^{n} w_i f_i,$$

joten, koska $\mathbf{f}$ on ortonormaali, yhtä hyvin pätee

$$\langle L(v), L(w) \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = \langle v, w \rangle.$$

Siis L on unitaarinen.
Osoitetaan vielä, että unitaarinen kuvaus on injektio. Olkoon $v \in V$ siten, että $L(v) = 0$. Tällöin

$$0 = |Lv| = |v|,$$

joten $v = 0$. □

Jokainen unitaarinen kuvaus $L\colon V \to W$ on upotus, eli isomorfismi $L\colon V \to L(W)$. Tästä syystä riittää tutkia vain bijektiivisia unitaarisia kuvauksia. Tutkitaan mikä on bijektiivisen unitaarisen kuvauksen matriisi ortonormaalien kantojen suhteen.
Koska isomorfiset avaruudet voidaan ”samastaa”, tutkitaan vain tapaus $V = W$. Oletetaan, että $L\colon V \to V$ on operaattori sisätuloavaruudessa V.

Lemma 4.23. *Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori äärellisulotteisessa sisätuloavaruudessa V. Tällöin L on unitaarinen jos ja vain jos se on isomorfismi ja*

$$L^{-1} = L^*.$$

Todistus. Olkoon $L\colon V \to V$ unitaarinen. Olkoot $v, w \in V$. Tällöin adjungaatin määritelmän nojalla

$$\langle v, L^*Lw\rangle = \langle Lv, Lw\rangle = \langle v, \rangle w.$$

Tästä seuraa, että jokaisella $v \in V$ pätee

$$\langle v, (L^*Lw - w)\rangle = 0.$$

Jos erityisesti tähän sijoitetaan $v = L^*Lw - w$, saadaan, että

$$|v|^2 = \langle v, v\rangle,$$

joten $v = L^*Lw - w = 0$. Tämä pätee jokaisella $w \in V$. Näin ollen $L^*L = \mathrm{id}$. Dimensionaalisista syistä nyt seuraa, että L on kääntyvä ja sen käänteiskuvaus on L^*.
Kääntäen oletetaan, että $L^*L = \mathrm{id}$. Tällöin, samalla tavalla kuin edellä, saadaan

$$\langle Lv, Lw\rangle = \langle v, L^*Lw\rangle = \langle v, \rangle w.$$

Näin ollen L on unitaarinen. □

Olkoon $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ sisätuloavaruuden V:n ortonormaali kanta. Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori ja olkoon $A = [L]_{\mathbf{e}}$ sen matriisi tässä kannassa. Tällöin A^* on operaattorin L^* matriisi $[L]_{\mathbf{e}}$. Koska vastaavuus ”operaattori->matriisi kannassa” on isomorfismi, joka säilyttää kertolaskun, nähdään, että unitaarisuuden ehto $L^*L = LL^* = \mathrm{id}$ toteutuu jos ja vain jos vastaaville matriiseille pätee

$$A^*A = A^*A = I_n.$$

Määritelmä 4.24. *Neliömatriisi $U \in M(n \times n; K)$ on unitaarinen jos*

$$UU^* = I_n = U^*U$$

eli jos U on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on sen adjungaatti U^*.

Olemme näyttäneet seuraavan tuloksen.

Lemma 4.25. *Olkoon $L\colon V \to V$ äärellisulotteisen sisätuloavaruuden V operaattori. Tällöin L on unitaarinen jos ja vain jos L:n matriisi $[L]_{\mathbf{e}}$ jossakin V:n ortonormaalissa kannassa on unitaarinen.*

Yleisemmin voidaan todistaa samalla tavalla, että jos $L\colon V \to W$ on bijektiivinen unitaarinen kuvaus, niin sen matriisi $[L]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}$ ortonormaalien kantojen suhteen on unitaarinen. Myös käänteinen pätee.

Kun kunta K on reaalilukujen kunta $\mathbb{R}$ unitaariset kuvaukset /matriisit sanotaan yleensä *ortogonaalisiksi*, kun taas termi "unitaarinen" usein varataan ainoastaan kompleksista tapausta varten. Tämä on hieman ikävä, mutta historiallisesti vakiintunut käytäntö. Ilmeisesti terminologia juontuu ajoista, jolloin mitään yhtenäistä reaali- ja kompleksisisätulon teoriaa ei oltu vielä kehitetty ja ne haluttiin pitää erillään.
Tässä materiaalissa "unitaarinen kuvaus/matriisi" tarkoittaa aina sekä $\mathbb{R}$:n, että $\mathbb{C}$:n tapausta, kuten se olikin määritelty yllä. Jos puhumme "ortogonaalisista kuvauksista/matriisesista" se taas tarkoittaa aina unitaarista JA reaaliarvoista.
Koska reaaliarvoisen matriisin konjugaatti on se itse, reaaliarvoinen matriisi O on ortogonaalinen jos ja vain $OO^T = I_n$.
Olkoon $A = (a_{ij} \in M(n \times n; K)$ neliömatriisi. Tällöin sen determinaantti on määritelty ja voidaan (periaatteessa, ei käytännössä) ilmaistaa sen kaavalla

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Sijoittamalla tähän A:n paikalle konjugaatti-matriisin $\overline{A}$ ja käyttämällä hyväksi, että konjugaatti on K:ssä rengashomomorfismi, nähdään, että

$$\det \overline{A} = \overline{\det A}.$$

Koska neliömatriisin transpoosilla on sama determinantti kuin alkuperäisellä matriisilla (Lemma 2.93), saadaan tästä, että jokaisella neliömatriisille A pätee

$$\det A* = \overline{\det A}.$$

Sovelletaan tämä tulos unitaarisen matriisin tapaukseen. Olkoon U unitaarinen. Tällöin $UU^* = I_n$ ja ottamalla yhtälön molemmista puolesta determinantti saadaan

$$|\det U|^2 = \det U \overline{\det U} = \det U \det U^* = \det UU^* = \det I_n = 1,$$

mistä seuraa, että

$$|\det U| = 1.$$

Unitaaristen ja ortogonaalisten matriisien avulla voidaan määritellä tärkeitä esimerkkejä klassisista kompakteista matriisiryhmistä, niin sanotuista unitaarisista ja ortogonaalisista ryhmistä. Näillä ryhmillä on erittäin tärkeä rooli transformaatio- ja Lie-ryhmien teoriassa, differentiaaligeometriassa, esitysteoriassa ja esim. kvanttifysiikassa.
Olkoon $n \in N$ ja $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Määritellään

$$U(n) = \{U \in M(n \times n; \mathbb{C}) \mid UU^* = I_n\},$$

$$
\begin{aligned}
O(n) &= \{O \in M(n \times n; \mathbb{R}) \mid OO^T = I_n\}, \\
SL(n; K) &= \{A \in M(n \times n; K) \mid \det A = 1\}, \\
SU(n) &= U(n) \cap SL(n; \mathbb{C}), \\
SO(n) &= O(n) \cap SL(n; \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Tällöin kaikki nämä ovat matriisin kertolaskun suhteen ryhmiä eli matriisiryhmiä (harjoitustehtävä). Ryhmä $U(n)$ sanotaan unitaariseksi ryhmäksi, $O(n)$ ortogonaaliseksi ryhmäksi. Erikoinen lineaarinen ryhmä (engl. special linear ryhmä) $SL(n; K)$ ei ole kompakti ryhmä, eikä liittyy mitenkään unitaarisiin matriiseihin, se on mainittu tässä yhteydessä yleissivistyksen mielessä ja koska se tarvitaan *erikoisen unitaarisen ryhmän* ja *erikoisen ortogonaalisen ryhmän* määritelmässä.
Itse asiassa $SL(n; K)$ ei ole mitään muuta kun determinanttikuvauksen $\det\colon GL(n; K) \to K \setminus \{0\}$, missä molemman puolet ajatellaan ryhminä (kertolaskun suhteen). Helposti nähdään, että tämä kuvaus on surjektio (mieti miksi), joten isomorfialauseen nojalla saadaan, että tekijäryhmä

$$GL(n; K)/SL(n; K) \cong K \setminus \{0\}.$$

Voimme myös tarkastella determinantin ryhmissä $U(n)$ ja $O(n)$. Tarkastellaan ensin reaalinen tapaus. Olemme yllä todistaneet, että ortogonaalisen matriisin O determinantille pätee $|\det O| = 1$, joten tässä tapauksessa $\det O \in \{1, -1\} = \mathbb{Z}_2$ (identifioimme $\mathbb{Z}_2$ ja kertolaskulla varustetun $\{1, -1\}$, sillä ne ovat isomorfiset). Näin ollen $\det O(n) \to \mathbb{Z}_2$ on ryhmähomomorfismi ja helposti nähdään, että näin määriteltynä se on surjektio (harjoitustehtävä). Koska tämän kuvauksen ydin on $SO(n)$, saadaan

$$O(n)/SO(n) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Näin ollen $O(n)$ on "kaksi kertaa suurempi" kuin $SO(n)$. Jos tarkastellaan $O(n)$:n sivuluokat $SO(n)$:n suhteen, niin niitä on kaksi. Toinen niistä on luonnollisesti $SO(n)$ ja toinen osajoukko

$$SO(n)_- = \{O \in O(n) \mid \det O = -1\}.$$

Jos sen sijaan tutkitaan determinanttikuvausta ryhmässä $U(n)$, niin nähdään, että sen kuvajoukko tämän joukon suhteen on nollasta eroavien kompleksilukujen ryhmän aliryhmä

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Koska determinantti-kuvauksen ydin on tässä tapauksessa $SU(n)$, saadaan

$$U(n)/SU(n) \cong S^1.$$

Tarkempi perusteli ja yksityiskohtien verifioiminen jää harjoitustehtäväksi. Ennen kuin käydään läpi esimerkkejä, todistetaan seuraava kätevä tekninen aputulos.

Lemma 4.26. *Olkoon U neliömatriisi. Olkoot $U_1, \ldots, U_n$ sen rivit ja $U^1, \ldots, U^n$ sen sarakkeet, tulkittuna K^n:n alkiona, kuten yleensä. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

1. *U on unitaarinen.*
2. *U^T on unitaarinen*
3. *Jono $(U^1, \ldots, U^n)$ on ortonormaali.*
4. *Jono $(U_1, \ldots, U_n)$ on ortonormaali.*

Todistus. Jos U ajatellaan lineaarikuvauksena $L_U \colon K^n \to K^n$, niin sen sarake vektorit $U^1, \ldots, U^n$ ovat standardikannan $\mathbf{e}$ kuvat tämän kuvauksen suhteen, $L_U(e_i) = U^i$, $i = 1, \ldots, n$. Koska standardikanta on ortonormaali, kuvaus L_U on unitaarinen jos ja vain jos sen matriisi ortonormaalissa kannassa $\mathbf{e}$, joka sattuu olemaan juuri U, on unitaarinen (Lemma 4.25). Mutta toisaalta Proposition 4.22 mukaan L_U on unitaarinen jos ja vain jos se kuvaa ortonormaali jono $\mathbf{e}$ ortonormaaliksi jonoksi. Näin ollen U on unitaarinen jos ja vain jos L_U on unitaarinen ja L_U on puolestaan unitaarinen jos ja vain jos $(U^1, \ldots, U^n)$ on ortonormaali jono. Olemme näyttäneet, että (1) ja (3) ovat yhtäpitäviä.
Osoitetaan, että (1) ja (2) ovat yhtäpitäviä. Symmetrian vuoksi riittää osoittaa, että (1):stä seuraa (2). Jos U on unitaarinen, niin $UU^* = I_n = U^*U$. Ottamalla transpoosi molemmilta puolelta saadaan

$$(U^*)^T U^T = I_n = U^T (U^*)^T.$$

Mutta $U^* = \overline{U}^T = \overline{U^T}$, joten $(U^*)^T = \overline{U} = \overline{U^T}^T = (U^T)^*$. Näin ollen $U^T (U^T)^* = I_n$, joten (2) pätee.
Jos sovelletaan jo todistettu yllä kohtien (1) ja (3) yhtäpitävyyttä matriisiin U^T, nähdään, että U^T on unitaarinen jos ja vain jos sen sarakkeet, eli U:n rivit $(U_1, \ldots, U_n)$ muodostavat ortonormaalin jonon. Näin ollen (2) ja (4) ovat ekvivalenttejä. $\square$

Esimerkki 4.27. *Olkoon $U = [z]$ (1×1)-matriisi, $z \in \mathbb{C}$. Tällöin $U^T = U$, joten $U^* = [\overline{z}]$ ja U on unitaarinen jos ja vain jos $[z\overline{z}] = UU^* = I_1 = [1]$. Näin ollen U on unitaarinen jos ja vain jos $z \in S^1$. Erityisesti $U(1)$ on isomorfinen S^1:n kanssa. Kun rajoitutaan tarkastelu reaaliarvoisiin matriiseihin, nähdään samalla tavalla, että $O(1) = \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$.*

Tutkitaan mitä muotoa ortogonaaliset (2×2)*-matriisit ovat.*
Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

ortogonaalinen, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*. Sen sarakkeet ovat* $A^1 = (a, b)$ *ja* $A^2 = (c, d)$*. Edellisen lemman nojalla, jos* A *on ortogonaalinen, niin sen sarakkeet muodostavat ortonormaalin jonon, erityisesti pitää olla* $a^2 + b^2 = 1$*. Saman lemman nojalla sama havainto pätee riveihin, joten pitää myös olla* $a^2 + c^2 = 1$*, joten* $b^2 = c^2$*, mikä on mahdollista jos ja vain jos* $b = \pm c$*. Samalla tavalla nähdään, että* $d = \pm a$*.*
Nyt $\det A = \pm 1$*. Tutkitaan ensin tapaus* $\det A = 1$*. Osoitetaan, että tällöin* $a = d$ *ja* $b = -c$*. Nimittäin, jos* $a = -d$*, saadaan suoraan laskemalla, että*

$$1 = \det A = -a^2 \pm b^2.$$

Koska samalla $a^2 + b^2 = 1$*, helposti nähdään, että tässä tapauksessa pakko olla* $a = 0$*, jolloin* $d = 0$*, joten joka tapauksessa* $a = d$*. Nyt on pakko olla* $b = -c$*, sillä jos* $b = c$*,* $a^2 + b^2 = 1 = \det A = a^2 - b^2$*, mistä* $b = c = 0$*, joten tässäkin tapauksessa yhtähyvin pätee* $b = -c$*.*
Olemme näyttäneet, että jokainen $A \in SO(2)$ *on muotoa*

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

missä $a^2 + b^2 = 1$*. Kääntäen helposti nähdään, että tällainen matriisi toteuttaa edellisen lemman vaatimukset ja sen determinantti on tasan* 1*, joten se on* $SO(2)$*:n alkio. Olemme todistaneet, että*

$$SO(2) = \{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \in S^1 \}.$$

Itse asiassa kuvaus $\phi\colon SO(2) \to S^1$*,*

$$\phi(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}) = (a, b)$$

helposti nähdään olevan ryhmien välinen isomorfismi. Näin ollen $SO(2) \cong S^1 \cong U(1)$*.*
Ryhmän $SO(2)$ *alkiot yleensä kirjoitetaan niin sanotussa geometrisessa muodossa*

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

missä $\alpha \in \mathbb{R}$. *Tähän muotoon päästään kun huomataan, että jokainen* S^1*:n piste* (a,b) *voidaan kirjoittaa muodossa* $(\cos\alpha, \sin\alpha)$*, missä* α *on itse asiassa tämän pisteen "vaihekulma", eli kulma jonka se (paikkavektorina) muodostaa* x*-akselin kanssa.*
Matriisin esityksellä muodossa A_α *on luonnollinen tulkinta - lineaarisena kuvauksena* (L_A) A *on tason kierto origon ympäri kulman* α *verran (mieti pysytkö näyttämään se "täsmällisesti").*
On selvä, että $A_\alpha = A_\beta$ *jos ja vain jos* $\alpha - \beta = n2\pi$ *jollakin* $n \in \mathbb{Z}$. *Jos vaaditaan, että* $\alpha \in [0, 2\pi)$*, siitä tulee yksikäsitteinen.*
Tutkitaan vielä matriisin A_α *ominaisarvoja. Karakteristinen polynomi on*

$$(X - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha,$$

mistä nähdään, että jos $b = \sin\alpha \neq 0$*, ominaisarvoja ei ole. Jos taas* $b = 0$ *eli* $\alpha = 0$ *tai* π*, matriisi on* $\pm I_2$ *ja jokainen vektori on sen ominaisarvo. Geometrisesti tämä on selvä - kierto muuttaa jokaisen nollasta eroavan vektorin suunta, paitsi jos kierto on triviaali nollakierto tai kierto puoli täyskierrosta, jolloin vektori kuvautuu vasta-vektorikseen.*
Tutkimatta on vielä tapaus $\det = -1$. *Mutta jos*

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

on ortogonaalinen matriisi, jonka determinantti on -1*, niin matriisi*

$$A' = \begin{bmatrix} a & -c \\ b & -d \end{bmatrix},$$

on ortogonaalinen matriisi, jonka determinantti on 1 *eli* $SO(2)$*:n alkio. Koska tällaista muoto tunnetaan jo, saadaan heti, että*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix},$$

missä $a^2 + b^2 = 1$ *ja kääntäen mikä tahansa tällainen matriisi on* $O(n)$*:n alkio, jonka determinantti* -1. *Jos lasketaan nyt tällaisen matriisin karakteristinen polynomi, saadaan polynomi*

$$(X - a)(X + a) - b^2 = X^2 - (a^2 + b^2) = X^2 - 1,$$

jonka reaaliset juuret ovat 1 *ja* -1. *Näin ollen tällainen matriisi on aina diagonalisoituva ja similaarinen matriisin*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

joka on kuvauksena peilaus x-akselin kautta, eli itse asiassa konjugaattikuvaus, kun tulkitaan $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Näin ollen jokainen $\mathbb{R}^2$:n ortogonaalinen kuvaus, jonka determinantti on -1, on peilaus, kunhan valitaan sopiva ortogonaalinen koordinaatisto. Kääntäen mikä tahansa tällainen kuvaus on ortogonaalinen ja sen determinantti on -1.
Jokainen tason ortogonaalinen kuvaus on siis kierto tai peilaus.

Tämä tulos voidaan yleistää - itse asiassa mikä tahansa n-ulotteisen $\mathbb{R}$-sisätuloavaruuden ortogonaalinen operaattori on suora summa kaksiulotteisista kierroista ja peilauksista. Tämä tulos johdetaan seuraavassa luvussa yleisimmän *normaalien operaattorien* teorian avulla.