

Tilastollisen päättelyn jatkokurssi, sl 2011, HT 3, viikko 39

1. Osoita, että monisteen Esimerkin 1.1 kohdissa (ii) ja (iii) (ks. s. 12) määritellyille sm-jonolle pätee väitetty MD-ominaisuus.

2. Olkoon X_1, X_2, \dots ($k \times 1$) vektoriarvoinen MD-jono, jonka komponenteilla on äärelliset toiset momentit, ja $M_n = X_1 + \dots + X_n$. Oletetaan lisäksi, että $\mathbf{E}(X_1) = 0$. Osoita yksityiskohtaisesti monisteen s. 11 mainittu MD-jonon korreloimattomuustulos eli $\text{Cov}(M_n) = \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i)$.

3. Oletetaan, että sv:t X ja Z ($k \times 1$) ovat riippumattomia ja $Z \sim \mathbf{N}_k(\mu, \Sigma)$. Osoita, että sv:n $Y = X + Z$ ehdollinen jakauma ehdolla $X = x$ on $\mathbf{N}_k(\mu + x, \Sigma)$ eli symbolein $Y|X=x \sim \mathbf{N}_k(\mu + x, \Sigma)$.

Vihje: Voit olettaa, että X :n jakauma on jatkuva (tulos pätee myös ilman tätä oletusta). Tarkastele lineaarista muunnosta $(Z, X) \mapsto (Y, X)$ ja johda (Y, X) :n yhteistihyysfunktio käyttäen tunnettua satunnaisvektoreiden tiheysfunktioiden muuntokaavaa (ks. esim. Koistinen: *Todennäköisyyslaskennan kurssin luentomoniste*, 11. joulukuuta 2009, s. 118–120)¹. Tämän jälkeen saat kysytyyn ehdollisen jakauman tiheysfunktion käyttäen tavanomaista kaavaa ja riippumattomuutta $X \perp\!\!\!\perp Z$.

4. Tarkastellaan monisteen s. 13 määriteltyä autoregressiivista aikasarjamallia. Perustele monisteen s. 17 esitetty tähän malliin liittyvän ytf:n lauseke

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \phi y_{i-1})^2\right\}, \quad \theta = (\phi, \sigma^2).$$

Vihje: Johda ensin sv:n (Y_i, \mathbf{Y}_{i-1}) ytf $f_{Y_i, \mathbf{Y}_{i-1}}$ käyttämällä (kääntäen yksikäsitteistä) muunnosta $(\varepsilon_i, \mathbf{Y}_{i-1}) \mapsto (Y_i, \mathbf{Y}_{i-1})$ ja tehtävän 3 vihjeessä mainittua sv:ien tf:den muuntokaavaa (tämän muunnoksen Jacobin determinantti on ykkönen). Käytä tämän jälkeen (ellei jo aikaisemmin) riippumattomuutta $\mathbf{Y}_{i-1} \perp\!\!\!\perp \varepsilon_i$ ja ehdollisen tf:n kaavaa $f_{Y_i|\mathbf{Y}_{i-1}} = f_{Y_i, \mathbf{Y}_{i-1}}/f_{\mathbf{Y}_{i-1}}$.

5. Tarkastellaan monisteen mallin (2.2) yleistystä

$$Y_j = Z_j \beta_j + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

jossa Z_i ($n_j \times p$) on kiinteä (ei-satunnainen) selittävien muuttujien matriisi ja $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N \perp\!\!\!\perp, \varepsilon_j \sim \mathbf{N}_{n_j}(0, \sigma^2 I_{n_j})$. Oletetaan, että kerroinvektori β_j ($p \times 1$) on satunnainen ja toteuttaa

$$\beta_1, \dots, \beta_N \perp\!\!\!\perp, \beta_j \sim \mathbf{N}_p(\beta, \Omega) \quad \text{ja} \quad (\beta_1, \dots, \beta_N) \perp\!\!\!\perp (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N).$$

Johda tähän liittyvä tilastollinen malli eli sv:n $\mathbf{Y}_n = (Y_1, \dots, Y_n)$ ytf modifioimalla monisteen malliin (2.2) liittyvää tarkastelua (ks. s. 14–15).

(jatkuu seuraavalla sivulla)

¹<http://wiki.helsinki.fi/pages/viewpage.action?pageId=48308040>

Vihje: Ratkaisussa oletetaan tunnetuksi eräitä perustietoja multinormaalijakaumasta (erityisesti tieto, että kahden riippumattoman samaa dimensiota olevan multinormaalisen satunnaisvektorin summa on multinormaalinen ja lisäksi multinormaalijakauman lineaariset muunnokset ovat multinormaalisia (ks. esim. Koistinen: *Todennäköisyyslaskennan kurssin luentomoniste*, 11. joulukuuta 2009, luku 9).