

Tilastollisen päättelyn jatkokurssi, sl 2011 HT 1, viikko 37

1. (i) Oletetaan, että sm-jonoille Y_n ja Z_n pätee $0 \leq Y_n \leq Z_n$ ja $Z_n \xrightarrow{p} 0$. Osoita, että $Y_n \xrightarrow{p} 0$.

(ii) Oletetaan nyt, että Y_n ja Z_n ovat $k \times 1$ vektoreita, joille pätee $0 \leq \|Y_n\| \leq \|Z_n\|$ ja $Z_n \xrightarrow{p} 0$. Osoita, että $Y_n \xrightarrow{p} 0$.

2. Olkoon $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ avoin väli, $h : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio ja $h'(\theta_0) \neq 0$. Tarkastellaan parametrin θ_0 asymptoottisesti normaalia estimaattoria $\hat{\theta}_n$, jolle pätee

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta_0)), \quad \sigma^2(\theta_0) > 0.$$

Osoita, että estimaattori $\hat{\theta}_n$ on tarkentuva eli $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$.

Vihje: Voit soveltaa ensin monisteen Lauseita 1.4 ja 1.3 tai Seurausta 1.1 ja sen jälkeen monisteen s. 5 puolenvälin jälkeen mainittua tulosta, jonka mukaan jakaumakongvergenssista $U_n \xrightarrow{d} c$ (c vakio) seuraa stokastinen konvergenssi $U_n \xrightarrow{p} c$.

3. (Jatkoa edelliselle) Osoita deltamenetelmän tulos (ks. monisteen s. 5–6)

$$\sqrt{n}(h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0)) \xrightarrow{d} N(0, [h'(\theta_0)]^2 \sigma^2(\theta_0)).$$

Vihje: Väliarvolauseen nojalla $h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0) = h'(\bar{\theta}_n)(\hat{\theta}_n - \theta_0)$, jossa välipiste $\bar{\theta}_n = c\hat{\theta}_n + (1-c)\theta_0$, $0 \leq c \leq 1$, ja c :n riippuvuutta n :stä ei ole merkitty näkyviin. Päättele estimaattorin $\hat{\theta}_n$ tarkentuvuuden ja tehtävän 1 avulla tulos $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$ ja käytä tämän jälkeen $\hat{\theta}_n$:n asymptoottista normaalisuutta ja monisteen Lausetta 1.1, Seurausta 1.1 (tai Lauseita 1.3 ja 1.4) ja tunnettua normaalijakauman ominaisuutta.

4. (Jatkoa kahdelle edelliselle) Johda standardoidun muuttujan

$$\frac{\sqrt{n}(h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0))}{h'(\hat{\theta}_n)\sigma(\hat{\theta}_n)}$$

asymptoottinen jakauma, kun funktio $\theta \mapsto \sigma^2(\theta)$ on jatkuva pisteessä θ_0 .

Vihje: Sovella edellisen tehtävän vihjeessä mainittuja lauseita.

5. Oletetaan, että tehtävässä 3 $\Theta = \mathbb{R}$, $h(\theta) = \theta^2$ ja $\theta_0 = 0$. Tällöin deltamenetelmän oletus $h'(\theta_0) \neq 0$ ei ole voimassa. Osoita, että nyt pätee (i) $\sqrt{n}\hat{\theta}_n^2 \xrightarrow{p} 0$ ja (ii) $n\hat{\theta}_n^2/\sigma^2(\theta_0) \xrightarrow{d} \chi_1^2$.

Vihje: Kohdassa (i) tehtävä 2 ja kohdassa (ii) tehtävän 2 jakaumakongvergenssioletus estimaattorista $\hat{\theta}_n$ ja samat lauseet kuin edellisissä tehtävissä.